سلسلة
العلوم الرياضية

الحساب والجبر والهندسة

للسنة الرابعة

عبد السلام الكناني
محمد الميلي

الشركة التونسية لفنون الرسم

الحساب والجبر والهندسة

موافق لبرامج السنة الرابعة من التعليم الثانوي

طبعة ثانية

تأليف

عبد السلام الكناني
كاتب الدولة للفلاحة

محمد الميلي
مهندس أول بادارة البريد

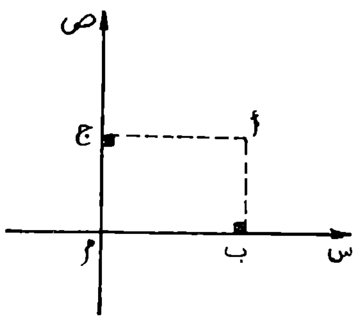
1960 — 1380

اصلاح الخطاء

صحيفة	سطر	الخطاء	الصواب
ج	9	للبرامج	لبرامج
د	قبل الاخير	بكتابنا	بكتبنا
هـ	5	المناسب	المناسبة
هـ	الاخير	ذا	ذات
و	5	معلومتية	معلومتين
11	1	مقدارين	مقداران
16	7	جذر..	الجذر
19	2	الحذرر	الجذور
41	2	$=7$س$-9+4$س$+6$	$= 7$ س $- 9 + 4$ س $+ 5$
43		يعوض الجدول بالجدول الآتي :	
45	1	س $\frac{2}{3}$	س $= \frac{2}{3}$
56	الاخير	$0 < \text{ب} . \text{أ}$	$0 > \text{ب} . \text{أ}$
64	الشكل 6	يعوض الشكل كما يلي : ..	

أ س $=$ ب

- 1") أ $\neq 0$: س $= \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$
- 2") أ $= 0$:
  - ب $\neq 0$ مستحيلة
  - ب $= 0$ غير معينة



صحيفة	سطر	الخطأ	الصواب
75	7	أ = $\frac{7}{4}$ ب = 5 + $\frac{7}{4}$	أ = − $\frac{7}{4}$ ب = 5 − $\frac{7}{4}$
75	8	ب = $\frac{27}{4}$	ب = $\frac{13}{4}$
75	9	ص = $\frac{7}{4}$ س + $\frac{27}{4}$ ...	ص = − $\frac{7}{4}$ + $\frac{13}{4}$
75	10	4ص − 7س − 27 = 0	4 ص + 7س − 13 = 0
91	1	الباب الرابع	الفصل الرابع
91	15	المنافسة	المناقشة
94	12	الموازي (وب)	الموازي لـ (وب)
100	6	القسم الخارجي	التقسيم الخارجي
104	4	$\frac{\text{د}}{\text{أب}} = \frac{\text{أك}}{\text{أج}}$	$\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\text{أك}}{\text{أج}}$
107	13	$= \frac{\text{أب}}{\text{أ'ج'}} =$	$= \frac{\text{أج}}{\text{أ'ج'}} =$
109	6	(أ ب ج)	(أ'ب'ج')
112	1	$\frac{\text{م ب}}{\text{م ب}} = \frac{\text{م أ'}}{\text{م أ}}$	$\frac{\text{م ب}}{\text{م ب'}} = \frac{\text{م أ'}}{\text{م أ'}}$
116	الاخير	$\overline{\text{أب}}^2 + \overline{\text{ج}}^2 = \overline{\text{ب}}^2$	$\overline{\text{أب}}^2 + \overline{\text{أج}}^2 = \overline{\text{بج}}^2$
117	الاخير	(ش 57)	(ش 58)
122	14	القطاع	القاطع
112	18	$\overline{\text{وم}}^2$ = وب × وج	$\overline{\text{وم}}^2$ = ود × وج

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

يسرنا ان نقدم في مستهل السنة الدراسية 1960 الى الاساتذة المكلفين بتدريس العلوم الرياضية والى طلبة السنة الرابعة المترشحين الى الشهادة الاهلية كتاب « الحساب والجبر والهندسة » . وهو الكتاب الثاني الذي نخرجه في سلسلة المؤلفات المدرسية في العلوم الرياضية التي اخذنا انفسنا بتاليفها خدمة للتعليم في بلادنا ومساعدة على وضعه في المستوى العصري الراقي الذي نصبو اليه .

وهذا الكتاب مطابق للبرامج السنة الرابعة من التعليم الثانوي .

وهو يشتمل كما يدل على ذلك عنوانه على ثلاثة اقسام :

القسم الاول منها ـ الحساب ـ وفيه ابواب النسبة والمناسبات وهي ضرورية لفهم مسائل الهندسة في السنوات الرابعة والخامسة والسادسة . كما فيه مسالة تكميلية هي قاعدة استخراج الجذور العددية التي ربما يحتاج اليها التلميذ في الجبر او العلوم الطبيعية في هذه السنة او بعدها .

القسم الثاني ـ الجبر ـ وهو لا يشتمل في الحقيقة على كثير من المسائل الجديدة بل معظم ما فيه هو تدريب التلميذ على الحساب الجبري وحل المعادلات وتقوية ملكته في ذلك كله حتى يتاهل التاهل اللازم لخوض غمار حقيقة الجبر والتفكير والاستدلال الرياضي في السنة الخامسة من التعليم . على ان هذا القسم يحتوي على مسالتين جديدتين لها اهمية كبرى وهما المتراجحات والتوابع .

اما القسم الثالث ـ الهندسة ـ فانه قائم على اساس ما سبق تعليمه في السنة السابقة وجاء في كتابنا الاول من معرفة نظرية للاشكال الهندسية وخصائصها . وهو يبني على ذلك دراسة العلاقات القياسية بين عناصر الاشكال . والى ذلك فان هذا القسم يفتح نافذة صغيرة على بحر من بحور الرياضيات الا وهو علم التوابع المثلثية

ولا بدلنا من تنبيه الاساتذة الى لزوم مراجعة المسائل الرئيسية من برنامج السنة الثالثة قبل الشروع في دراسة مسائل السنة الرابعة التي اشتمل عليها هذا الكتاب .

ولا شك عندنا انهم يدركون جيد الاراك ان طريقة رديئة جدا يتحتم حمل التلامذة على الابتعاد عنها الى اقصى حد هي طريقة الحفظ للمسائل والنظريات والادلة عن ظهر قلب كما تحفظ المتون . وان الطريقة الصائبة الوحيدة هي ان تنقش كلها في ذهن التلميذ بحيث يكون قادرا على التعبير عنها وتاديتها بصفة صحيحة واضحة ولو بعدت عبارته عن عبارة الكتاب . وبهذه الطريقة يتدرب على التفكير الرياضي وتتكون له الملكة الرياضية التي ليست جبلية بل هي مكتسبة وناتجة عن دربة مستمرة وعمل متواصل . على ان هذه الملكة لا يكفي في تكوينها وتمتينها التلقين والتدريس للمسائل التي جاءت بالكتاب . بل لا بد في ذلك من حل التلميذ لاكبر عدد ممكن من التمارين التابعة لكل فصل من الكتاب . وقد يكون من الصالح هنا ان نذكر ما ينبغي ان يعلق من اهمية اساسية على ان تكون التمارين كتابية وان تكون نتيجة عمل التلميذ الشخصي ، وان يهتم الاستاذ بطريقة استدلال التلميذ في تمرينه على المطلوب اكثر من اهتمامه بالنتيجة وحدها ونود ان يفهم التلامذة ان عدد التمارين التي يكلفهم الاستاذ بحلها هو بالطبيعة محدود فلا بد لهم ان ارادوا بانفسهم خيرا من ان يحلوا من تلقاء انفسهم اكبر عدد ممكن منها .

وقبل الختام نريد ان نشير الى اننا سعيا وراء البساطة والتدقيق في التعبير وطلبا لتعابير اقرب الى العربية قد اعرضنا عن بعض مصطلحات جرت في المؤلفات الرياضية الى حد الآن . ونكتفي في هذا المعنى بمثال واحد وهو استعمالنا لعبارة « تابع موافق » عوض « تابع تصاعدي » وعبارة « تابع معاكس » عوض « تابع تنازلي » اذ ليس هنا في الحقيقة تصاعد ولا تنازل .

وفي الختام نرى لزاما علينا ان نتوجه بالشكر الى كل من شجعنا على مواصلة جهودنا في تاليف الكتب المدرسية للتعليم الثانوي كما نشكر « الشركة التونسية لفنون الرسم » التي اعتنت بطبع هذا الكتاب واخراجه عنايتها بكتابنا السابقة .

محمد الميلي عبد السلام الكناني

السنـــــة الرابعــــــة

من التعليم الثانوي

برنامج الرياضيات

١) الحســاب

1) النسبة والمنـاسب ـ خاصيات النسب والمنـاسبات ـ الرابـع المتنـاسب المتوسط المتناسب او المتوسط الهندسي ـ القسمة التناسبية

2) الجذور التربيعية ـ استخراج الجذرالتربيعي لعدد صحيـح وعددعشرى (القواعد بدون دليل)

2) الجـــــــبر

1) الجمل الجبرية : الحدود المتشـابهة ـ سطح جملتين ـ المطابقات المعـتبرة الكسور الجبرية ـ عمليات بسيطة على الجمل والكسور الجبرية

2) تعيين نقطة على مستو بالنسبة الى محورين متعامدين

3) التوابع : تعريف وامثلة بسيطة

4) التمثيل البياني : تعريف وامثلة بسيطة

5) التابع الخطي : البحث الجبري والتمثيل البياني

6) معادلات الدرجة الاولى ذات المجهول الواحـد والمعادلات الراجعة الى الدرجة الاولى

7) سلسلات الدرجة الاولى ذات المجاهيل

8) مشاكـل جبرية مؤدية الى معـادلة او سلسلة معادلات من الدرجـة الاولى ذا العوامل العددية .

3) الهندسة

أ ـ 1) تعاريف وامثلة من النظريات العكسية : نظريات الشروط الواجبة والكافية

2) المحلات الهندسية : تعريف ـ امثلة بسيطة ـ النقط المتساوية البعد عن نقطتين معلومتية او عن مستقيمين معلومين ـ النقط التي يرى منها قطعة تحت زاوية معلومة

3) بناءات هندسية بسيطة : الدائرة المحيطة لمثلث ـ الدائرة المرسومة في مثلث ـ بناء مماس لدائرة ـ بناء المماسات المشتركة لدائرتين

ب ـ 1) نسبة قطعتين : تقسيم قطعة حسب نسبة معلومة ـ نظرية طاليس تطبيقات : الرابع المتناسب ـ التقسيم التناسبي

2) المثلثات المتشابهة : حالات التشابه

3) العلاقات القياسية في المثلث القائم : العلاقات القياسية في الدائرة ـ المتوسط الهندسي

4) النسب المثلثية لزاوية حادة : جدول النسب المثلثية (الحبيب ـ حبيب التمام ـ الظل)

5) المضلعات المنتظمة : نظريات عامة ـ المضلعات المحيطة والمرسومة في دائرة ـ درس بعض المضلعات المنتظمة : المثلث ـ المربع ـ المسدس ـ المثمن

طول محيط الدائرة (من غير دليل)

6) المساحات : وحدة المساحة ـ مساحة المستطيل ـ متوازى الاضلاع المثلث ـ شبه المنحرف

نسبة مساحتي مثلثين متشابهين

مساحة الدائرة (من غير دليل) ـ مساحة القطاع

جدول الاصطلاحات

الحساب

نسبة	Rapport
مناسبة	Proportion
الوسطان	Les moyens
الطرفان	Les extrêmes
اعداد متناسبة	Nombres proportionnels
الرابع المتناسب	Quatrième proportionnelle
المتوسط المتناسب او الهندسي	Moyenne proportionnelle
مقدار (ج مقادير)	Grandeur
مقادير متناسبة طردا	Grandeurs directement proportionnelles
مقادير متناسبة عكسا	Grandeurs inversement proportionnelles
عامل التناسب	Coefficient de proportionnalité
جذر تربيعي	Racine carrée
جذر تربيعي صحيح	Racine carrée exacte
جذر تربيعي تقريبي	Racine carrée approchée
كمية مزاوجة	Quantité conjuguée

الجبر

منتظم المحورين	Système d'axes
تابع (ج توابع)	Fonction
متغير أو متحوّل	Variable
تمثيل بياني	Représentation graphique
المنحني البياني	Courbe représentative
تابع موافق	Fonction croissante
تابع معاكس	Fonction décroissante
تابع خطي	Fonction linéaire
ميلان	Pente

Coefficeint angulaire	عامل زاوي
Résolution graphique	الحل الخطي او الهندسي
Equation du premier degré	معادلة الدرجة الاولى
Système du premier degré	سلسلة من الدرجة الاولى

الهندسة

Théorème direct	نظرية مباشرة
Théorème réciproque	نظرية العكس
Théorème préliminaire	نظرية تمهيدية
Condition nécessaire et suffisante	الشرط الواجب والكافي
Lieu géométrique	محل هندسي
Arc capable	قوس مقتدر
Projection d'un point	مسقط نقطة
Quadrilatère inscrit	رُباعي مرسوم
Cercle inscrit	دائرة مرسومة
Cercle circonscrit	دائرة محيطة
Tangente commune intérieure	مماس مشترك داخلي
Tangente commune extérieure	مماس مشترك خارجي
Point de contact	نقطة التماس
La similitude	التشابه
Rapport de similitude	نسبة التشابه
Division proportionnelle	قسمة تناسبية
Triangles semblables	مثلثات متشابهة
Points homologues	نقط متجانسة
Côtés homologues	اضلاع متجانسة
Polygones réguliers	مُضلّعات مُنتظمة
Ligne polygonale régulière	خط مضلع منتظم
Quadrilatère	رُباعي
Triangle équilatéral	مثلث منتظم

Carré	مُرَبَّع
Hexagone	مسدس
Octogone	مُثَمَّن
Octogone convexe	مثمن مُحَدَّب
Octogone étoilé	مثمن نجمي
Apothème	عامد او راسم
Circonférence	محيط الدائرة
Corde	وتر
Secteur	قطاع
Couronne	حلقة دائرة
Relations métriques	علاقات قياسية
Puissance d'un point par rapport à un cercle	قوة نقطة بالنسبة لدائرة
Trigonométrie	علم المثلثات
Sinus (Sin a)	جَيْب (حا أ̂)
Cosinus (Cos a)	جيب التمام (حتا أ̂)
Tangente (tg a)	ظلّ (ظا أ̂)
Cotangente (cotg a)	ظلّ التمام (ظتا أ̂)
Rapport trigonométrique	نسبة مثلثية
Résolution des triangles	حلّ المثلثات

الكتابُ الأوّلُ

الحسابُ

الفصل الأوّل

النسبَـة والمنُاسَبـة

1 - تعـار يـف :

أ) نِسْبَة عددين أ ، ب هي نتيجة قسمة (أ) على (ب) وتكتب : $\frac{أ}{ب}$

مثال : نسبة العددين 3 ، 5 هي : $\frac{3}{5}$

ونسبـة العـددين 25 ، 35 هي : $\frac{25}{35} = \frac{5}{7}$

ب) الاعداد المتناسبة : العددان أ ، ب متناسبان مع العددين ج ، د

اذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$

المسـاواة السـابقة تسمى مُناسَبة وهي تـدل على ان الاعـداد أ ، ب ، ج ، د ، هي اعداد متناسبة

ج) المُناسَبة هي تَساوي نسبتين : $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$

مثال : $\frac{15}{12} = \frac{20}{16}$

أ ، ب ، ج ، د ، تسمى حدود المناسبة

العـددان أ ، د يسميان الطـرفين

والعددان ب ، ج يسميان الوسطين

المناسبة $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$ تدل على ان الاعداد أ، ب، ج ،د، هي اعداد متناسبة

2 - نظرية اساسية : في مناسبة سطح الطرفين يساوي سطح الوسطين

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$$

وبعد التجنيس : $\frac{أ \cdot د}{ب \cdot د} = \frac{ب \cdot ج}{ب \cdot د}$

حينئذ : $\boxed{أ \cdot د = ب \cdot ج}$

3 - ملاحظة : عملا بالنظرية الاساسية نعبر على ان الاعداد أ، ب، ج، د

متناسبة :

اما بالمناسبة: $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$

وإما بالعلاقة: $أ\,د = ب\,ج$

4 - نتائج :

أ) $أ\,د = ب\,ج$ يدل على ان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$

ب) $د\,أ = ب\,ج$ » » » $\frac{د}{ب} = \frac{ج}{أ}$

ج) $أ\,د = ج\,ب$ » » » $\frac{أ}{ج} = \frac{ب}{د}$

د) $د\,أ = ج\,ب$ » » » $\frac{د}{ج} = \frac{ب}{أ}$

نلاحظ ان التناسب بين اربعة اعداد يعبر عنه باحدى المناسبات الاربع السابقة ـ وهذا يلخص في النظرية الآتية :

5 - نظرية : في كل مناسبة يمكن :

1 - تبادل الطرفين
2 - تبادل الوسطين
3 - تبادل طرفين والوسطين معا

مثال : $\frac{5}{15} = \frac{45}{135}$ $\qquad$ $\frac{135}{15} = \frac{45}{5}$

$\frac{5}{45} = \frac{15}{135}$ $\qquad$ $\frac{135}{45} = \frac{15}{5}$

خصائص المناسبات

6 - نظرية : اذا فرضنا المناسبة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}}$ فانه يمكن استنتاج مناسبات اخرى

$$\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}+\text{د}}{\text{د}} \qquad \frac{\text{أ}-\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}-\text{د}}{\text{د}}$$

$$\frac{\text{أ}}{\text{أ}+\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{ج}+\text{د}} \qquad \frac{\text{أ}}{\text{ب}-\text{أ}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}-\text{ج}}$$

1) من المناسبة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}}$ يمكن استنتاج العلاقة:

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + 1 = \frac{\text{ج}}{\text{د}} + 1$$

وبعد التجنيس : $\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}+\text{د}}{\text{د}}$

2) كذلك : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} - 1 = \frac{\text{د}}{\text{ج}} - 1$

$$\frac{\text{أ}-\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}-\text{د}}{\text{د}}$$

7 - الاعداد المتناسبة : تقول ان الاعداد أ ، ب ، ج ، د ، . . . . . . ك

متناسبة مع الاعداد : أ' ، ب' ، ج' ، د' ، . . . . ك' اذا حققت :

$$\frac{أ}{أ'} = \frac{ب}{ب'} = \frac{ج}{ج'} = \frac{د}{د'} = \cdots\cdots = \frac{ك}{ك'}$$

مثال : الاعداد : 1 ، 2 ، 5 ، 12 متناسبة مع الاعداد : 3 ، 6 ، 15 ، 36

لان $$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15} = \frac{12}{36}$$

8 - نظرية : إذا كانت لنا سلسلة من النسب المتساوية فان نسبة مجموع البسوط الى مجموع المقامات تساوي القيمة المشتركة لتلك النسب

نفرض أن : $$\frac{أ}{أ'} = \frac{ب}{ب'} = \frac{ج}{ج'} = \cdots\cdots = \frac{ك}{ك'} = ن$$

حينئذ :
$$أ = ن \times أ'$$
$$ب = ن \times ب'$$
$$\cdots\cdots$$
$$ك = ن \times ك'$$

بعد جمع المساويات السابقة طرفا طرفا نجد :

$$أ + ب + \cdots + ك = ن(أ' + ب' + \cdots + ك')$$

بحيث يكون : $$ن = \frac{أ + ب + ج + \cdots + ك}{أ' + ب' + ج' + \cdots + ك'}$$

حينئذ : $$\frac{أ}{أ'} = \frac{ب}{ب'} = \frac{ج}{ج'} = \cdots = \frac{ك}{ك'} = \frac{أ + ب + ج + \cdots + ك}{أ' + ب' + ج' + \cdots + ك'}$$

حالة خاصة $$\boxed{\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{أ + ج}{ب + د} = \frac{أ - ج}{ب - د}}$$

الرابع المتناسب

9 - تعريف : نقول ان (س) هو الرابع المتناسب مع أ ، ب ، ج ، اذا كونت الاعداد أ ، ب ، ج ، س مناسبة

$$\boxed{\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{س}}$$

من المناسبة نستنتج : $أ \cdot س = ب \cdot ج$

$$س = \frac{ب \cdot ج}{أ}$$

المتوسط المتناسب

10 - تعريف: (س) هو المتوسط الهندسي او المتوسط المتناسب لعددين أ ، ب إذا كونت الاعداد أ ، س ، س ، ب مناسبة

$$\boxed{\frac{أ}{س} = \frac{س}{ب}} \quad \text{او} \quad \boxed{س^2 = أ \cdot ب}$$

حينئذ : $س = \sqrt{أ ب}$

11 - تطبيق : جِدْ عددين أ ، ب متناسبين مع 5 ، 7 إذا علمت مجموعها 10

الفرض : $أ + ب = 10$

عملا بنظرية سابقة نكتب : $\frac{أ}{5} = \frac{ب}{7} = \frac{أ+ب}{12} = \frac{10}{12}$

$$\text{حينئذ} \begin{cases} أ = 5 \times \frac{10}{12} = \frac{50}{12} = \frac{25}{6} \\ ب = 7 \times \frac{10}{12} = \frac{70}{12} = \frac{35}{6} \end{cases}$$

تمارين

1) جِدْ نسبة العددين أ ، ب في الحالات الآتية :

أ = 15	ب = 30	أ = 500	ب = 600
أ = 75	ب = 25	أ = 620	ب = 175
$\text{أ} = \frac{1}{3}$	$\text{ب} = \frac{1}{2}$	$\text{أ} = \frac{3}{2}$	$\text{ب} = \frac{2}{3}$
$\text{أ} = \frac{7}{5}$	$\text{ب} = \frac{6}{5}$	أ = 40 ، 5	ب = 60 ، 0

2) جد العدد (س) لتتحصل على مناسبة

$$\frac{2}{5} = \frac{\text{س}}{25} \qquad \frac{\text{س}}{3} = \frac{16}{24} \qquad \frac{4}{\text{س}} = \frac{5}{50}$$

3) جد الرابع المتناسب للاعداد : $\frac{5}{7}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{13}{14}$

4) من المناسبة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}}$ استنتج المناسبات الآتية :

$$\frac{\text{أ} + \text{ج}}{\text{أ} - \text{ج}} = \frac{\text{ب} + \text{د}}{\text{ب} - \text{د}} \qquad \frac{\text{أ} + 3\,\text{ج}}{\text{أ} - 3\,\text{ج}} = \frac{\text{ب} + 3\,\text{د}}{\text{ب} - 3\,\text{د}}$$

$$\frac{\text{س أ} + \text{ص ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{س ج} + \text{ص د}}{\text{د}} \qquad \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ}^2 + \text{ج}^2}{\text{أ ب} + \text{ج د}}$$

5) جد عددين أ ، ج متناسبين مع 4 ، 5 اذا علمت مجموعها 1512

6) اقسم نسيجا طوله 148 م الى قطعتين متناسبتين مع العددين 3 ، 7

اقسم النسيج نفسه الى ثلاثة قطع متناسبة مع الاعداد $\frac{7}{10}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{14}{15}$

7) جد عددين أ ، ب نسبتهما $\frac{4}{11}$ اذا علمت ان :

أ) ـ مجموعهما 187،5

ب) ـ الفرق بينهما 12،6

8) اثبت تساوي النسب الآتية :

$$\frac{25}{99} = \frac{2525}{9999} = \frac{252525}{999999}$$

9) جد الاعداد س، ص، ط، هـ لتتحصل على سلسلة النسب المتساوية الآتية :

$$\frac{3}{5} = \frac{س}{12} = \frac{ص}{15} = \frac{12}{ط} = \frac{2}{هـ}$$

1) اذا فرضت ان $\frac{أ}{أ'} = \frac{ب}{ب'} = \frac{ج}{ج''} = 0 ، 6$

جد قيمة النسبتين :

$$\frac{أ + 3ب + 2ج}{أ' + 3ب' + 2ج'} \quad ؛ \quad \frac{أ - 2ب + 3ج}{أ' - 2ب + 3ج'}$$

الفصل الثاني

(أ) ـ المقادير المتناسبة طردا

12 ـ تمهيد : سعر نسيج متناسب طردا مع طوله ونسبة السعر الى الطول تساوي سعر وحدة الطول

كذلك اجرة عامل متناسبة طردا مع عدد ايام العمل ـ فبقدر ما يتضاعف عدد ايام العمل بقدر ما تتضاعف اجرة العامل ونسبة الاجرة الى ايام العمل تساوي اجرة اليوم

13 ـ تعريف : نقول ان مقدارين متناسبان طردا اذا كانت نسبة قيمتين متوافقتين منهما نسبة ثابتة

مثال : سعر نسيج يساوي 600 ف وطوله 3 م

حينئذ : $\frac{600}{3} = 200$ ف سعر المتر

وسعر نسيج من نوعه يساوي 1800 ف وطول النسيج هو 9 م

حينئذ : $\frac{1800}{9} = 200$ ف

وبصفة عامة اذا كانت قيمة المقدار الاولى تساوي (ص)

والقيمة الموافقة لها من المقدار الثاني تساوي (س) فان

$\frac{ص}{س} = أ$ أ هو عدد قار

14 ـ نتيجة أولى : اذا كان مقداران متناسبين طردا فان قيم احدهما تساوي سطع القيم الموافقة من المقدار الآخر في عدد قار

1800 ف $= 9 \times 200$ ف

$ص = أ \times س$

العدد (أ) يسمى عامل التناسب

15 - نتيجة ثانية : اذا كان مقـدارين متناسبين طردا وتضاعف المقـدار الاول ن مرات فان المقدار الثاني يتضاعف ن مرات ايضا

مثال : اذا تضاعف طول النسيج 3 مرات مثلا تضاعف سعره 3 مرات ايضا

$$\left.\begin{array}{l} س_1 = ن\, س \\ ص_1 = ن\, ص \end{array}\right\} \qquad \frac{ص_1}{س_1} = \frac{ن ص}{ن س} = \frac{ص}{س} = أ$$

16 - الكم في المائة : في بعض الاحيـان يكون عامل التناسب نسبة مئـوية اي كسرا مقامه 100

حينئذ مشاكل الكم في المائة هي مشاكل خاصة بالمقادير المتناسبة

مثال : اشترى تاجر بضاعة بسعر 225 ف وباعها بسعر 315 ف بكم في المائة يكون ربحه :

الربح على 225 هو $315 - 225 = 90$

الربح على 100 هو $\frac{90 \times 100}{225} = 40$

الجـواب : 40 %

(ب) المقـادير المتناسبة عكسا

17 - تعريف : نقـول ان الاعـداد : أ ، ب ، ج . . . متنـاسبة عكسا مـع الاعداد : أ′، ب′، ج′ . . . اذا كانت متنـاسبة طردا مع عكس الاعـداد أ′، ب′، ج′

اي مع الاعداد : $\frac{1}{أ'} ، \frac{1}{ب'} ، \frac{1}{ج'}$

حينئذ: $\frac{أ}{\frac{1}{أ'}} = \frac{ب}{\frac{1}{ب'}} = \frac{ج}{\frac{1}{ج'}}$

ومنه نستنتـج : $\boxed{أأ' = بب' = جج'}$

18 - نتيجة اولى : اذا كانت اعداد متناسبة عكسا مع اعداد اخرى فان سطح عددين متوافقين يساوي قيمة قارة

مثال : الاعداد 3 ، 4 ، 6 ، متناسبة عكسا مع 12 ، 9 ، 6

لان $3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$

19 - مقادير متناسبة عكسا : تقول انمقدارين متناسبان عكسا اذا كان سطح قيمتين متوافقتين منهما يساوي قيمة قارة

مثال : عمل يدوي يتطلب 150 يوما اذا قام به عامل واحد

فاذا استعملنا س عاملا فانهم يقومون به في مدة ص يوما بحيث ان :

$$\text{س} \times \text{ص} = 150$$

حينئذ عدد العملة متناسب عكسا مع عـدد الايام اللازمة للقيام بالعمل كله

عدد العملة :	5	10	15	30	50
عدد الايام :	30	15	10	5	3

20 - نتيجـة ثانيـة : اذا كان مقداران متناسبين عكسا وتضاعف المقدار الاول ن مرات فان المقدار الثاني يصغر ن مرات

21 - مشكلة : 15 عاملا يقومـون بعمل في مدة 30 يوما - في كم من يوم تقوم 9 عملة بنفس العمل ؟

عدد العملة متناسب عكسا مع عدد الايام اللازمة للقيام بالعمل - حينئذ :

$$15 \times 30 = 9 \times \text{س}$$

وعـدد الايـام هـو : $\text{س} = \frac{15 \times 30}{9} = 50$ يوما

تمـــــارين

11) قطعة (أ) يســاوي طولها $\frac{5}{7}$ من طول قطعة (ب) ـ والقطعة الثـانية اطول من الاولى بـ (14 صم) ـ ما هو طول القطعتين ؟

12) يربح تـاجر % 30 على كل بضاعة يبيعها ـ فماهو سعر بيعه لبضاعات وقع اشتراؤها على حساب :

80 ف   190 ف   2700 ف   740 ف

وما هو سعر اشترائه لبضاعتين وقع بيعهما على حساب

390 ف   910 ف

13) اشترى تاجر 372 م مــن نسيج سعــره 475 ف المتر ثم باع 214 م منه فكان ربحـه % 20 ـ وباع الباقي بخسارة ـ ولكن مجموع بيعه انتج له (14700 ف) ربحا ـ جــد سعر بيع المتر في كل من الحالتين

14) اشترى تاجر كتبا بسعر 130 ف الكتاب ـ ولكن البــائع حسب له حطيطة قدرهـا % 20 وسلم له 13 كتابا مقــابل سعر 12 كتــاب ـ فدفع التاجر 8736 ف ـ فكم من كتاب اشترى ؟

15) دفع ثلاثة شركاء في تجارة الاقساط الآتية 150000 ف 190 000 ف و 450.000 ف ، فـكان مجموع الارباح 158.000 ف ـ فمـا هو ربح كل واحد اذا علمت ان الارباح متناسبة مع الاقساط الموضوعة

16) راس مـال تاجرين هو 180.000 ف ـ فكان ربح التــاجر الاول 13200 ف وربح الثاني 9350 ف ـ اذا علمت ان الارباح متناسبة مع الاقساط الموضوعة فأوجد قسط كل تاجر

17) جــد اعدادا متناسبة عكسا 5 ، 7 ، 9

18) ــجد اعدادا متناسبة عكسا مع 10 ، 15 ، 20

19) قسم 9800 الى ثلاثة حصص متناسبة عكسا مع 5 ، 8 ، 12

20) أُستعمل 90 كلغ من الصوف لصنع نسيج طوله 60 م وعرضه 1،20 م فما هو طول نسيج أُستهلك 150 كلغ اذا علمت ان عرض النسيج هو 1،50 م ؟

21) ثلاثة اعداد متناسبة عكسا مع 5 ، 7 ، 9 ـ والعدد الاول اكبر من الثـالث بـ (420) ـ جــد الاعداد الثلاثة.

الفصل الثالث

الجذر التربيعي

22) تذكير :

أ) مربع عدد هو سطح ذلك العدد في نفسه

ب) مربع جداء يساوي جداءَ مربع جميع اضلاعه $(أب ج)^2 = أ^2 ب^2 ج^2$

ج) يُرَبّع كسر بتربيع بسطه ومقامه $\left(\frac{أ}{ب}\right)^2 = \frac{أ^2}{ب^2}$

د) مربع مجموع عددين $(أ + ب)^2 = أ^2 + 2أب + ب^2$

23) تعريف : نقول إن (س) هو الجذر التربيعي للعدد (أ) إذا كان مربع (س) يساوي (أ)

$س = \sqrt{أ}$ اذا كان $س^2 = أ$

مثال : $2 = \sqrt{4}$ لان $2 \times 2 = 4$

$8 = \sqrt{64}$ لان $8 \times 8 = 64$

24) جذرُ جداء : لنتحصل على جذر جداء مرفوعة الى قوى زوجية تقسم جميع الادلة على (2)

مثال: $\sqrt{أ^2 ب^4 ج^6} = أب^2 ج^3$

$441 = 3^2 \times 7^2$

$\sqrt{441} = 3 \times 7 = 21$

25) جذرُ كسر: جذر كسر يساوي كسرا حداهما جذور حدي الكسر المعلوم

$$\sqrt{\frac{أ^2}{ب^2}} = \frac{أ}{ب} \qquad \sqrt{\frac{18}{50}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

26) سطح جذرين : سطح جذري عددين يساوي جذر سطح العددين

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 3 = 6$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أب}$$

اذا ربعنا الطرف الاول نتحصل على مربع الطرف الثاني

$$(\sqrt{أ} \times \sqrt{ب})^2 = (\sqrt{أ})^2 \times (\sqrt{ب})^2 = أ \times ب$$

27) جذر سطح : جذر سطح عددين يساوي سطح جذري العددين

$$\sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{أ^2ب} = \sqrt{أ^2} \times \sqrt{ب} = أ\sqrt{ب}$$

$$\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27} = \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{25 \times 3}$$

$$- \sqrt{3 \times 9} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

وتسمى هذه العملية استخراج الاعداد الصحيحة من تحت علامة الجذر

28) قَسَمُ جِذْرين : قسم جذري عددين يساوي جذر قسم العددين

$$\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{أ}{ب}}$$

نربع الطرف الاول : $\left(\dfrac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}\right)^2 = \dfrac{(\sqrt{أ})^2}{(\sqrt{ب})^2} = \dfrac{أ}{ب}$

نرى ان $\dfrac{أ}{ب}$ هو مربع الطرف الثـاني

مثال : $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\dfrac{2}{18}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$

$$\frac{\sqrt{4أ^2ب}}{\sqrt{ب^3}} = \sqrt{\frac{4أ^2ب}{ب^3}} = \sqrt{\frac{4أ^2}{ب^2}} = \frac{2أ}{ب}$$

29) ادخال عدد تحت علامة الجذر:

سطح عدد في جذر يساوي جذر سطح مربع العدد في العدد الكائن تحت علامة جذر

مثال : $3\sqrt{5} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{45}$

30) تطبيق :

أ) اجر العملية الآتية :

$$(\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2)(\sqrt{5} + 2) = 5 + \sqrt{15} - 2\sqrt{5}$$
$$+ 2\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 4 = 1 + \sqrt{15} + 2\sqrt{3}$$

ب) الغاء علامة الجذر من مقام الكسر

اذا كان المقام متركبا من جذر واحد نضرب طرفي الكسر في ذلك الجذر

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

واذا كان المقام متركبا من مجموع جذرين (اوالفرق بينهما) نضرب طرفي الكسر في الكمية المزاوجة [الكميتان (أ + ب) و (أ ــ ب) هما كميتان متزاوجتان]

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} =$$

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

تمـــــــارين

استخرج الاعدادالصحيحة من تحت علامات الجذور الآتية :

22) $\sqrt{8}$ $\quad$ $\sqrt{12}$ $\quad$ $\sqrt{20}$ $\quad$ $\sqrt{18}$

23) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ $\frac{3}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $\frac{1}{\sqrt{5}}$

24) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{35}}$

25) $\sqrt{\frac{2}{9}}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{28}}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$

أجر العمليات الآتية :

26) $\sqrt{200}-\sqrt{50}-\sqrt{18}$ $\qquad$ $\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{150}$

27) $\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{12}$ $\qquad$ $\sqrt{12}+2\sqrt{27}+3\sqrt{75}$

28) $2\sqrt{50}-\sqrt{98}-\sqrt{18}$ $\qquad$ $2\sqrt{8}+2\sqrt{32}+2\sqrt{98}$

29) $\sqrt{357}\times\sqrt{48}+\sqrt{405}$ $\qquad$ $\sqrt{275}\times\sqrt{135}\times\sqrt{165}$

30) $9\sqrt{\text{أ}} - 2\sqrt{4\text{أ}} - \frac{5}{3}\sqrt{9\text{أ}}$

31) $(\sqrt{2}+1)^2$ $(\sqrt{3}+1)^2$ $(\sqrt{5}+1)^2$

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ $(2\sqrt{3}+1)^2$ $(2\sqrt{5}+1)^2$

32) اختزل الكسور الآتية بعد الغاء علامة الجذر

$$\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \qquad \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \qquad \frac{6+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2+\sqrt{2}} \qquad \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}+1} \qquad \frac{\text{أ}+4\sqrt{\text{أ}}+4}{\sqrt{\text{أ}}+2}$$

الفصل الرابع

استخراج الجذور التربيعية

31) المربعات الصحيحة من 1 الى 100 :

المربعات الصحيحة من 1 الى 100 هي :

$1^2 = 1$ $\quad$ $2^2 = 4$ $\quad$ $3^2 = 9$ $\quad$ $4^2 = 16$ $\quad$ $5^2 = 25$

$6^2 = 36$ $\quad$ $7^2 = 49$ $\quad$ $8^2 = 64$ $\quad$ $9^2 = 81$ $\quad$ $10^2 = 100$

فجذور هذه المربعــات الصحيحة التي هي أصغر من المائة معلومة ويلزم حفظها عن ظهر قلب .

32) جذرعدد اصغر من المائة وليس مربعا صحيحا :

مثال : ماهو جذر العدد : 75 ؟

75 عدد محصور بين مربعين صحيحين

$$64 < 75 < 81$$

حينئذ $\quad 8 < \sqrt{75} < 9$

فنقــول ان 8 هي القيمــة التقريبية السفــلي لجذر العــدد 75 والنقص هــو دون الواحد

33) قاعــدة : الجذر التربيعي مــن عــدد بالنقص الى الواحد هو اكبر عدد صحيح مربعه اصغر من العدد الاول او مساوي له

8 هو الجذر التربيعي بالنقص الى الواحد للعدد 75

34) تعريــف : الباقي هــو الفرق بين العــدد وبيــن مربع جــذره التقريبي

مثال : باقي الجذر في 75 هو

$75 - 64 = 11$

نلاحظ ان $11 < 2 \times 8$

35) الصورة العمليـة للتفتيش عن الجـذر التـربيعي لاعـداد صحيحـة :

1) تقسم العدد الى منازل ذات رقمين ابتداء من اليمين

2) نستخرج الجذر التربيعي من المنزلة اليسرى فنتحصل هكـذا على اول رقم من جذر العدد

3) نكون مربع هذا الرقم ونطرحه من المنزلـة اليسرى فنتحصل على الباقي الجزئي الاول

4) نكتب المنزلة الثانية على يمين الباقي الاول ونفصل الرقم الايمن من العدد المكون ونقسم الجزء الايسر منه على ضعف الجذر لنتحصل على الرقم الثاني من الجذر

5) نجري التجربة الآتية لنتيقن ان هذا الرقم لائق : نكتب الـرقم على يمين ضعف الجذر ونضرب العدد النـاتج في الرقم نفسه ـ ان امكن طرح حاصل الضرب من العدد المكـون من البـاقي الاول ومن المنزلة الثانية كان الجذر لائقا

6) نستمر في العمل هكذا الى آخر منزلة ـ فيكون الجذر الحاصل هو جذر العدد المعلوم وآخر بـاق هو بـاقي العملية

مثـال

3' 16' 64' 59	1779
2 16	$27 \times 7 = 189$
1 89	
27 64	$347 \times 7 = 2429$
24 29	
3 35 59	$3549 \times 9 = 31941$
3 19 41	
16 18	

36) ملاحظة :

استخراج الجـذر التربيعي من الاعـداد الصحيحة او العشرية بالنقص

الى $\frac{1}{10}$ ، $\frac{1}{100}$ ، الخ....

يقسم العدد الى منازل ابتداء من اليمين او من الفاصل اذا وجد .

تمـــــارين

33) استخرج جذور الاعداد الآتية :

121	144	725	4900	6400	441
1936	1296	17424	8681	7056	50625

34) استخرج جـذور الكسور الآتية :

$\frac{4}{25}$ $\frac{18}{32}$ $\frac{144}{169}$ $\frac{12}{75}$ $\frac{81}{196}$ $\frac{180}{245}$

35) جِدْ عددين متواليين اذا علمت ان الفرق بين مربعيهما يساوي :

35 ؛ 43 ؛ 57 105

36) استخرج جذور الاعداد الآتية :

828.100	8 798،44	93،5089	0،7744
938.961	9.880،32	91،9681	0،0081
231.361	2.798،41	30،4704	0،2304

37) استخرج جذور الاعداد الآتية :

2.104	54.167	837.468	4،515
6.825	87.559	436 423	8،417
5.637	83.614	756 438	0،314

38) جد عددين اذا علمت نسبتهما 3 وسطحهما 978.123

نفس السؤال { النسبة 3 والسطح 9.781،23
النسبة 3 0 والسطح 9.7812،3

39) مساحة ارض تساوي 12.282 م^2 ونسبة الطول الى العرض هي $\frac{4}{3}$

فما هو قيس الطول وقيس العرض

40) ما هو ضلع مربع مساحته مساوية لمساحة مستطيل طوله 360م وعرضه 160م

الكتابُ الثاني

الجبرُ

الباب الأول

الحساب الجبري

الفصل الأول : التراكيب الجبرية

37) تعريف : التراكيب الجبرية هي مجموع اعداد وحروف تفصلها علامات عمليات الجبر .

فالتركيب الجبري يدل على عمليات جبرية يمكن اجراؤها إذا عرفنا قيم الحروف

مثال : $\dfrac{4\text{أ س}^{2} - 3\text{ب س}}{\text{أ س} + \sqrt{3\text{ص}}}$

38) انواع التراكيب الجبرية :

تنقسم التراكيب الى قسمين :

القسم الاول : تراكيب لاجذرية وهي التي ليس لها حروف تحت علامة الجذر

مثال : $\dfrac{3\text{أ س}}{\sqrt{2\text{س}}}$

و يشتمل القسم الاول على ثلاثة انواع :

أ) وحيد الحد : هو تركيب لا يوجد فيه غير علامة الضرب

مثال : $(-4\text{أ}^{2}\text{ب س}^{3}\text{ص})$

ب) كثير الحدود : وهو مجموع وحيدات الحد

ج) تراكيب كسرية: وهي كسر جبري بسطه ومقامه كثيرا حدود

مثال : $\frac{3س^2 - 9}{5س + 3}$

القسم الثاني : تراكيب جذرية وهي التي تحتوي على حـروف تحت علامة الجذر

مثال : $\frac{\sqrt{3س^2 - 4}}{س^2 + 2}$

وحيد الحـد

39) تعـريف : وحيد الحد هو كمية لا توجد فيها الا عملية الضرب

مثال : (3أس) ؛ (— 4أ^2 ب س^2 ص)

الجزؤ العددى من وحيد الحد يسمى المَثَل

40) الحدود المتشابهة : وهي الحدود المتحدة في جزئها الحرفي

مثل : 3أس ^{2} ؛ (— 4 أس^2) ؛ $\left(- \frac{5}{3} \right.$ أس$\left.^2 \right)$

41) جمع الحدود المتشـابهة : تجمع الحدود المتشـابهة بجمع امثالها وابقـاء الجزء الحـرفي على حاله

(3أس^2) + (— 4 أس^2) + $\left(- \frac{5}{3} \right.$ أس$\left.^2 \right)$ =

$\left(3 - 4 - \frac{5}{3} \right)$ أس ^{2} = $\left(- \frac{8}{3} \right.$ أس$\left.^2 \right)$

42) الضرب : تضرب وحيدات الحد بعضها في بعض بضرب الامثـال بعضها في بعض وضرب الاجزاء الحرفية بعضها في بعض.

(3 أس ^{2}) × (ـــ 4 أ^2 س) × (+ 5 ب ص) = ـــ 60 أ^3 ب س ^{3} ص

43) القسمـة : يقسم وحيـد الحـد على وحيـد الحـد باختزال الكسر الناتج

$$\frac{\text{49 أ}^2\text{ ب }^3\text{س}}{\text{28 أب }^4\text{ س}} = \frac{\text{7 أ}}{\text{4ب}}$$

كثيـر الحدود

44) تعريف : كثير الحدود (او الجملة الجبرية) هو مجموع وحيدات الحد.

مثال 4 أ س ^{2} ـــ أ ب س + 5 ب ^{2}

اذا اشتمل كثير الحدود على حدين نسميه ثنائي الحد

واذا اشتمل على ثلاث حدود نسميه ثلاثى الحد

45) اختصار كثير الحدود : يختصر كثير الحدود بجمع الحدود المتشابهة فيه

مثال 4 س ^{3} ـــ 5 س ص ^{2} + ص ^{3} ـــ 3 س ^{3} + س ^{2} ص ـــ 5 ص ^{3}

+ 6 س ص ^{2} = س ^{3} + س ^{2} ص + س ص ^{2} ـــ 4 ص ^{3}

46) العمليات :

أ) الجمع: مجموع جمل جبرية هو جملة جبرية

ب) الضرب : تضرب جملة جبرية في جملة اخرى بضرب جميع حدود الاولى

في جميع حدود الثانية وجمع "سطوح الناتجة .

(3 أس^2 ـــ ب س) (أ س + ب) = 3 أ^2 س^3 + 3 أ ب س ^{2} ـــ أ ب س ^{2}

ـــ ب ^{2} س = 3 أ^2 س ^{3} + 2 أ ب س^2 ـــ ب ^{2} س

47) ترتيب كثير الحدود : يرتب كثير الحدود ترتيبا تنازليا او ترتيبـا

تصاعديا بالنسبة لحرف من حروفه

مثال 2 أس ^{4} + 2 أ^2 س ^{3} ـــ 5 أ ^{3} س ^{2} + أ^5

الفصل الثاني — المطابقات المعتبرة والتحليل الى جداء

48) تعرضنا في السنة السابقة الى المطابقات المعتبرة الآتية :

$(أ + ب)^2 = أ^2 + 2أب + ب^2$

$(أ - ب)^2 = أ^2 - 2أب + ب^2$

$(أ + ب)(أ - ب) = أ^2 - ب^2$

$(أ + ب + ج)^2 = أ^2 + ب^2 + ج^2 + 2أب + 2ب ج + 2أج =$
$\sum أ^2 + \sum 2أب$

$(أ + ب)^3 = أ^3 + 3أ^2 ب + 3أب^2 + ب^3$

$(أ - ب)^3 = أ^3 - 3أ^2 ب + 3أب^2 - ب^3$

$أ^3 + ب^3 = (أ + ب)(أ^2 - أب + ب^2)$

$أ^3 - ب^3 = (أ - ب)(أ^2 + أب + ب^2)$

49) تحليل جملة جبرية الى جُدَاء :

أ) الطريقة الاولى : استخراج العامل المشترك

مثال : $4أ^2 س^3 - 6أ س^2 + 8أ^2 س$

العامل المشترك هو $2أ س$ ؛ وتحلل الجملة كما يلي :

$2أ س (2أ س^2 - 3 س + 4أ)$

ب) الطريقة الثانية : استعمال المطابقات المعتبرة

مثال : $س^2 - 9 = (س + 3)(س - 3)$

مثال : $س^2 - 4 س + 4 = (س - 2)^2$

ميثال: $س^3 - 8 = (س - 2)(س^4 + 2 س + 4)$

ج) الطريقة الثالثة : استخراج العامل المشترك ثم استعمال مطابقة معتبرة

مثال : $49 أ^2 ب^2 - 4 أ^4 = أ^2 (49 ب^2 - 4 أ^2) =$
$أ^2 (7 ب + 2 أ)(7 ب - 2 أ)$

مثال : أس + بص + أص + بس = (أس + أص) + (بس + بص) = أ (س+ص) + ب (س+ص) = (أ + ب) (س+ص)

الكسور الجبرية

50) **الاختزال** : نحلل البسط الى جداء وكذلك المقام ثم نختزل اذا وجدنا عوامل مشتركة بينهما

مثال :
$$\frac{\text{9أ}^2 - 4}{\text{9أ}^2 - \text{6أ}} = \frac{(\text{3أ}+2)(\text{3أ}-2)}{\text{3أ}\,(\text{3أ}-2)} = \frac{\text{3أ}+2}{\text{3أ}}$$

51) **التجنيس** :

أ) قبل الشروع في التجنيس يلزم اختزال الكسور

ب) نحلل المقامات الى جداءات

ج) المقام المشترك الاصغر هو جداء الكميات المشتركة وغير المشتركة لجميع المقامات . والكميات المشتركة تكتب مرة واحدة باكبر دليل لها

مثال :
$$\frac{\text{س} + 4}{\text{س}^2 - 1} - \frac{\text{س} - 2}{(\text{س} + 1)^2} + \frac{\text{3س} - 4}{\text{س}^2 - \text{2س} + 1}$$

تحليل المقامات

$\text{س}^2 - 1 = (\text{س} + 1)(\text{س} - 1)$

$(\text{س} + 1)^2 = (\text{س} + 1)^2$

$\text{س}^2 - \text{2س} + 1 = (\text{س} - 1)^2$

المقام المشترك هو :

$(\text{س} + 1)^2 (\text{س} - 1)^2$

الكمية تساوي :

$$\frac{(\text{س}+3)(\text{س}^2-1) - (\text{س}-2)(\text{س}-1)^2 + (\text{3س}-4)(\text{س}+1)^2}{(\text{س} + 1)^2 (\text{س} - 1)^2}$$

ويتم العمل باجراء العمليات المنصوص عليها في البسط ثم اختصاره

52) **الجمع :** تجمع الكسور الجبرية باجراء العمليات الآتية :

1" ـ نحلل البسوط والمقامات الى جداءات
2" ـ نختزل الكسور اذا امكن ذلك
3" ـ نفتش على اصغر مقام مشترك ممكن
4" ـ نجنس الكسور ونجري عمليات الجمع
5" ـ نختزل النتيجة اذا امكن ذلك

53) **ملاحظة :** ينبغي ابقاء المقام المشترك على صورة جداء

تمارين

41) اجمع ذوات الحد الآتية :

أ) $4\,\text{س}^2\,\text{ص}^3$ ، $5\,\text{س}^2\,\text{ص}^3$ ، $-\frac{1}{2}\,\text{س}^2\,\text{ص}^3$ ، $\frac{1}{4}\,\text{س}^2\,\text{ص}^3$

ب) $\frac{2}{3}\,\text{أ}^2\,\text{ب}$ ، $-\frac{1}{4}\,\text{أ}^2\,\text{ب}$ ، $+\frac{1}{2}\,\text{أ}^2\,\text{ب}$ ، $-\frac{1}{6}\,\text{أ}^2\,\text{ب}$

ج) $\frac{1}{4}\,\text{أ}\,\text{ب}^3$ ، $-\frac{1}{8}\,\text{أ}\,\text{ب}^3$ ، $+\frac{3}{8}\,\text{أ}\,\text{ب}^3$ ، $+\frac{1}{2}\,\text{أ}\,\text{ب}^3$

د) $\frac{1}{4}\sqrt{\text{س ص}}$ ، $-\frac{1}{2}\sqrt{\text{س ص}}$ ، $+\frac{3}{4}\sqrt{\text{س ص}}$ ، $-\sqrt{\text{س ص}}$

42) اجر عمليات الضرب الآتية :

$\left(\frac{2}{3}\,\text{س}^2\,\text{ص}\right) \times \left(\frac{3}{5}\,\text{أ}\,\text{ب}\,\text{س}^2\right)$ ، $\frac{4}{5}\,\frac{\text{س}^2}{\text{ص}} \times \frac{5\text{ص}^2}{6\text{س}}$

$\frac{3}{4}\,\text{أ}^2\,\text{ب}^3 \times \frac{4}{5}\,\text{أ}^3\,\text{ب}^2$ ، $\frac{4}{3}\,\text{أ}^2\,\text{ب}^3 \times \frac{3}{8}\,\frac{\text{أ}}{\text{ب}^3}$

43) اجر عمليات القسمة الآتية :

(5 س^{2} ص) : (10 س ص^{2}) ، (15 أ س) : (6 أ^{3} س)

$\frac{2}{5}$ س^{2} ص : $\frac{3}{5}$ س ص^{2} ، 30 $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$: 15 $\frac{\text{س}^{2}}{\text{ص}^{2}}$

44) اجمع الحدود المتشابهة في كثيرات الحدود الآتية

1 ") 5 س^{2} — 4 س + 1 + 3س^{2} — 5س — 3 — س^{2} + 6 س + 4

2 ") 4 س^{2} + س ص — ص^{2} — س ص — ص^{2} — 2 س^{2} + 3 س ص + ص^{2}

3 ") 4س^{2} — 2 ص^{2} + 5س^{2} ص + س ص^{2} + س^{2} ص + س^{2} + 3 ص^{2} + س ص^{2}

4 ") (س^{2} — 3 س + 1) — (2 س^{2} — 4 س + 3) — (5 + 2 س — 4 س^{2})

5 ") س^{2} — س ص — ص^{2} — [س^{2} — س ص — (2 س^{2} — 3 س ص + ص^{2})]

6 ") 9 س^{2} — 3 س ص + ص^{2} — (س^{2} — س ص — ص^{2}) — (س^{2} — 2 س ص + ص^{2})

45) هَسّب كثيرات الحدود الآتية :

أ = س^{2} — 4 س^{2} — 5 س + 1

ب = 2 س^{3} + س^{2} + 4 س — 3

ج = س^{3} — س^{2} — 5 س + 2

حد المجموعات : (أ + ب + ج) ; (أ — ب + ج) ؛ (أ + ب — ج) (ب + ج — أ) ثم اجمع النتائج الاربع ـ ماذا تلاحظ ؟ لماذا هذه النتيجة؟

46) اجر عمليات الضرب الآتية :

1″) (س^{3} — 2 س^{2} + 3 س — 1) (5 س^{2})

(س^{2} — س ص + ص^{2}) (2 س ص^{2})

2″) (س^{3} — س^{2} — س + 1) (— 4 س)

(س^{2} + س ص — ص^{2}) (3 س ص)

3″) (س^{2} — 5 س^{2} + 3 س — 1) (س^{2} — س — 1)

4″) (س^{3} + 5 س^{2} — 3 س + 1) (س^{2} + س + 1)

5″) (س^{4} — س^{2} ص^{2} + ص^{4}) (س^{4} + س^{2} ص^{2} + ص^{4})

47) جد قيم السطوح الآتية باستعمال السطوح المعتبرة

1″) (5س — 3ص)^{2} (5 س + 3 ص)^{2} (2أ — 3 ب)^{2}

2″) (7س + 3ص)^{2} (7 س — 3 ص)^{2} (2أ + 3 ب)^{2}

3″) (أ + ب — ج)^{2} (2 أ — ب + 3ج)^{2} (4أ + ب + ج)^{2}

4″) (3س — ص) (3س + ص) (5س^{2} — ص^{2})(5س^{2} + ص^{2})

5″) (س — ص)(س^{2} + س ص + ص^{2}) ؛ (س + ص)(س^{2} — س ص + ص^{2})

6″) (2أ — ب) (4أ^{2} + 2أب + ب^{2}) ؛ (2أ + ب)(4أ^{2} — 4أب + ب^{2})

7″) (أ — $\frac{\text{ب}}{2}$) (أ^{2} + $\frac{\text{أب}}{2}$ + ب^{2})

(أ + $\frac{\text{ب}}{2}$) (أ^{2} — $\frac{\text{أب}}{2}$ + ب^{2})

48) اجر العمليات الآتية :

1″) (س — 1) (س + 3) + (س — 2)^{2}

(س — 3) (س + 2) + (س — 1) (س + 1)

2″) (س + 2) (2 س + 1) + (س — 2) (2 س — 1)

(س + 3 ص) (س + ص) + (س + ص) (س — ص)

3") (2 س — 5)(س — 2) — (س + 4) (س + 1) — (س — 2)^{2}

4") (س + 2)^{3} — 3 (س + 2)^{2} (س — 2) + 3 (س + 2) (س — 2)^{2} + (س — 2)^{3}

5") (3س + ص — 2) (3 س — ص + 2) — (3 س — 2) (3 س + 2)

6") (أ + ب + ج)^{2} — 2 (أ + ب + ج) (ب + ج) + (ب + ج)^{2}

49) استخرج اكبر عامل مشترك في كثيرات الحدود الآتية :

1") 5 س — 15 س^{2} ص + 20 س ص^{2}

12 س^{2} ص^{3} + 18 س ص^{4} — 24 س^{4} ص

2") 6 أ^{3} — 18 أ^{2} + 6 أ   5 أ^{2} س^{2} — 10 أ^{2} س ص + 5 أ^{2} ص^{2}

3") 4 أ^{3} — 5 أ ب + أ ج   6 أ^{4} ب^{3} — 12 أ^{3} ب^{4} + 4 أ^{2} ب^{3}

4") 6 أ^{3} — 24 أ^{2} — 6أ

13 أ^{3} س^{2} ص^{3} — 26 أ^{3} س^{2} ص^{2} + 39 أ^{2} س^{3} ص^{2}

50) حلل الى جُداءات الكميات الآتية :

1") 9 س^{2} — 1   9 س^{3} — س   12 س^{3} — 3 س

2") 4 س^{2} — 9 ص^{2} ؛ 12 س^{2} — 27 ص^{2} ؛ 12 أ^{3} س^{2} — 27 أ^{3} ص^{2}

3") 100 س^{4} — 64   49 س^{2} ص^{2} — 4 س^{4} س^{4} — ص^{4}

4") أ^{2} — أب + ب^{2} — ج^{2} أ^{2} + 2أب + ب^{2} — ج^{2}

5") أ^{2} — ب^{2} — ج^{2} + 2ب ج   أ^{2} — ب^{2} — ج^{2} — 2ب ج

6") (س + ص — 2)^{2} — (2 — س + ص)^{2}

7") 4 ب^{2} ج^{2} — (ب + ج^{2} — أ^{2} }

8") 8 س^{3} — 1   8 س^{3} + 1   8 س^{3} — 27 ص^{3}

9") $(س+ص)^3 - (س-ص)^3$ ؛

$(س^2+س+1)^2 - (س^2+س-1)^2$

51) استخرج العامل المشترك في الكميات الآتية ثم حلل النتائج الى جداءات :

1") $(2س+1)(5س+3) + (2س+1)(س+2) - (2س+1)(2س-1)$

2") $(3س+2)(س-3) + (س-3)^2 + س^2 - 9$

3") $(2س+3)(س+7) - (2س+3)^2 + 6س + 9$

4") $(س-5)^2 + س^2 - 25 - (5-س)(2س+1)$

5") $(2س-3)^2 + (3-2س)(س-1) - 6 + 4س$

52) اجر عمليات الجمع الآتية اختزل النتائج:

1") $\dfrac{(س-3)^2}{6} + \dfrac{(س-2)^2}{4} + \dfrac{(س+1)^2}{18}$

2") $\dfrac{2أ}{أ+س} + \dfrac{3س}{أ-س} + \dfrac{3أس-س^2}{أ^2-س^2}$

$\dfrac{س}{س+1} - \dfrac{س}{س-1} + \dfrac{س^2+1}{س^2-1}$

3") $\dfrac{س+3}{س-3} + \dfrac{س-3}{س+3} + \dfrac{12س}{س^2-9}$

$\dfrac{1}{1+س} + \dfrac{1}{1-س} - \dfrac{4س^2}{1-س^4}$

4") $\dfrac{1}{(س-2)^3} + \dfrac{1}{(س-2)^2} + \dfrac{1}{س-2}$

35) اجر عمليات الضرب الآتية ثم اختزل النتائج :

1") $\dfrac{س^2+1}{س^2-1} \times \dfrac{س-1}{س+1}$ ؛ $\dfrac{س^3-1}{س+1} \times \dfrac{س^3+1}{س-1}$

2) $\dfrac{\text{س}^2 - 4\text{س} + 4}{\text{س}^2 + 6\text{س} + 9} \times \dfrac{\text{س}^2 - 9}{\text{س}^2 - 4}$ ؛ $\dfrac{\text{س}^2 - 16}{\text{س}^2 - 25} \times \dfrac{\text{س}^2 - 5\text{س}}{\text{س ص} - 4\text{ص}}$

3) $\dfrac{\text{س}^3 + \text{س}^2\text{ص}}{\text{ص}^2\text{ط}^2} \times \dfrac{\text{ص}^3 + \text{ص}^2\text{ط}}{\text{س}^2\text{ط}^2} \times \dfrac{\text{ط}^3 + \text{ط}^2\text{س}}{\text{س}^2\text{ص}^2}$

4) $\dfrac{\text{س} + 2\text{ص}}{\text{س}^2 - 2\text{س ص}} \times \dfrac{\text{س}^3 - 4\text{س}^2\text{ص} + \text{س ص}^2}{3\text{س}^2 + 12\text{س ص} + 12\text{ص}^2}$

54) اجر عمليات القسمة الآتية :

1) $\dfrac{4\text{أ ب}}{\text{س}^2} \div \dfrac{6\text{أ}^2}{\text{س ص}}$ ، $\dfrac{2\text{أ}}{\text{أ} + 3} \div \dfrac{6\text{أ}}{2\text{أ} + 6}$

2) $\dfrac{\text{أ}^2 + 2\text{أب} + \text{ب}^2}{\text{أ}^2} \div \dfrac{\text{أ}^2 - \text{ب}^2}{\text{أ ب}}$

$\dfrac{\text{س}^2 - 2\text{س ص} + \text{ص}^2}{\text{س}^2 + 2\text{س ص} + \text{ص}^2} \div \dfrac{\text{س} - \text{ص}}{\text{س} + \text{ص}}$

3) $\dfrac{\text{س}^2 - 16}{\text{س}^2 - 25} \div \dfrac{2\text{س} - 8}{3\text{س} - 15}$ ، $\dfrac{\text{س}^2 + 3\text{س}}{4\text{س ص} - 16\text{ص}} \div \dfrac{\text{س} + 3}{3\text{س} - 12}$

4) $\dfrac{\text{أ}^3 + \text{ب}^3}{\text{أ}^3 - \text{ب}^3} \div \dfrac{\text{أ}^2 - \text{أب} + \text{ب}^2}{\text{أ}^2 + \text{أب} + \text{ب}^2}$ ، $\dfrac{\text{س}^3 + 27}{\text{س}^3 - 8} \div \dfrac{5\text{س} + 15}{6\text{س} - 12}$

55) ألغِ علامة الجذر من مقام الكسور الآتية :

1) $\dfrac{1}{\sqrt{3} + 1}$ ؛ $\dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$ ؛ $\dfrac{1}{\sqrt{3} - 1}$ ، $\dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}$

2) $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$ ؛ $\dfrac{\sqrt{2} + 3}{\sqrt{2} - 1}$ ؛ $\dfrac{\sqrt{3} + 2}{2 - \sqrt{3}}$

3") $\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1}$ ، $\frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

4") $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ، $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

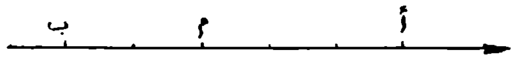
5") $1 + \frac{س+\sqrt{س}}{1+\sqrt{س}} + \frac{س-\sqrt{س}}{1-\sqrt{س}}$

الفصل الثالث : عـلاقـات « شـال »

54) تعـريفـات :

1") المحور هو مستقيم عينا عليه الانتحاء الايجابي و نقطة الاصل (م)

2") إحـداثي النقطة (أ)او فاصلتها هو عدد جبري قيمته المطلقة طول القطعة مأ و علامته (+) إذا كان انتحاء (مأ) موافقاً لانتحاء المحور و (—) إذا كان معاكسا له



(ش1)

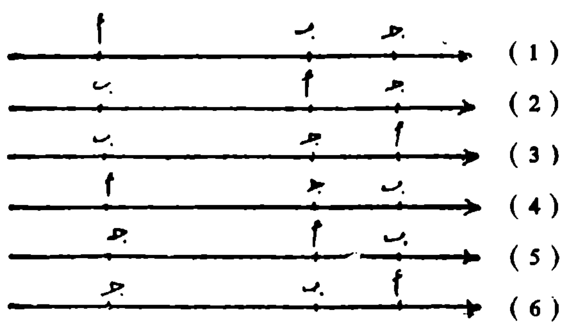
$$\overline{\text{م أ}} = +3 \qquad\qquad \overline{\text{م ب}} = -2$$

55) علاقات شال : غايتها هي وضع علاقة بين قياسات القطع المحصورة بين نقط مأخوذة على محور مهما كان وضعها

الحـالة الاولى : ثلاث نقط

اذا كانت لنا ثلاث نقط (أ،ب،ج) على محور فان العلاقة الآتية تربط بينها :

$$\boxed{\overline{\text{أج}} = \overline{\text{أب}} + \overline{\text{بج}}}$$



(ش2)

توزيع 3 نقط على محور يكون حسب ستة صور

نبرهن على صحة العلاقة في الصورة 4 مثلا بالنسبة للقيم المطلقة :

$$\text{أج} = \text{أب} - \text{ج ب} \qquad (1)$$

وعملا بانتحاء المحور في الصورة 4 :

$$\overline{\text{أج}} > 0 \qquad \overline{\text{أب}} > 0 \qquad \overline{\text{جب}} > 0$$

والفرق $\overline{\text{أب}} - \overline{\text{جب}} > 0$ لان $\text{أب} > \text{جب}$

فالعلاقة (1) هي حينئذ صحيحة جبريا

$$\overline{\text{أج}} = \overline{\text{أب}} - \overline{\text{جب}}$$

وحيث ان $-\overline{\text{جب}} = \overline{\text{بج}}$

فان $\overline{\text{أج}} = \overline{\text{أب}} + \overline{\text{بج}}$

56) <u>صور اخرى لعلاقة « شال » :</u> اذا كانت لنا ثلاث نقط (أ، ب، ج) على محور فان

$$\overline{\text{بج}} = \overline{\text{بأ}} + \overline{\text{أج}} \qquad \overline{\text{جأ}} = \overline{\text{جب}} + \overline{\text{بأ}}$$

$$\overline{\text{بأ}} = \overline{\text{بج}} + \overline{\text{جأ}} \qquad \overline{\text{جب}} = \overline{\text{جأ}} + \overline{\text{أب}}$$

57) <u>تطبيق:</u> القياس الجبري لقطعة (أب) على محور

نطبق علاقة شال على النقط الثلاث (م، أ، ب)

(ش3)

$$\overline{\text{أب}} = \overline{\text{أم}} + \overline{\text{مب}}$$ حيث ان $\overline{\text{أم}} = -\overline{\text{مأ}}$

حينئذ $$\boxed{\overline{\text{أب}} = \overline{\text{مب}} - \overline{\text{مأ}}}$$

وتلخص هذه النتيجة في النظرية الآتية :

58) <u>نظرية:</u> القياس الجبري لقطعة موضوعة على محور يساوي الفرق بين فصل نهايتها وفصل بدايتها

59) علاقات « شال » : الحالة الثانية : اربع نقط (أ، ب، ج، د) او اكثر

1") نعتبر النقط الثلاث أ، ب، د

$$\overline{\text{أد}} = \overline{\text{أب}} + \overline{\text{بد}}$$

2") ثم نعتبر النقط الثلاث ب، ج، د

$$\overline{\text{بد}} = \overline{\text{بج}} + \overline{\text{جد}}$$

نعوض $\overline{\text{بد}}$ بقيمتها في العلاقة الاولى

$$\boxed{\overline{\text{أد}} = \overline{\text{أب}} + \overline{\text{بج}} + \overline{\text{جد}}}$$

60) ملاحظة :

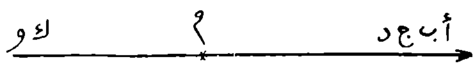
عملا بالصورة الاخيرة يمكن كتابة علاقات اخرى :

$$\overline{\text{بد}} = \overline{\text{بأ}} + \overline{\text{أج}} + \overline{\text{جد}} \qquad \overline{\text{أب}} = \overline{\text{أج}} + \overline{\text{جد}} + \overline{\text{دب}}$$

$$\overline{\text{جب}} = \overline{\text{جأ}} + \overline{\text{أد}} + \overline{\text{دب}} \qquad \overline{\text{جد}} = \overline{\text{جأ}} + \overline{\text{أب}} + \overline{\text{بد}}$$

61) تعميم علاقات « شال » :

اذا كانت لنا عدة نقط أ، ب، ج ....، ك، و .... على محور فان :



$$\overline{\text{أو}} = \overline{\text{أب}} + \overline{\text{بج}} + \cdots + \overline{\text{كو}}$$

62) صورة اخرى لعلاقات « شال » :

من العلاقة $\overline{\text{أب}} + \overline{\text{بج}} + \overline{\text{جد}} = \overline{\text{أد}}$

يمكن استنتاج $\overline{\text{أب}} + \overline{\text{بج}} + \overline{\text{جد}} + \overline{\text{دأ}} = \overline{\text{أد}} + \overline{\text{دأ}}$

حيث ان $\overline{\text{أد}} + \overline{\text{دأ}} = \text{صفرا}$

$$\boxed{\overline{\text{أب}} + \overline{\text{بج}} + \overline{\text{جد}} + \overline{\text{دأ}} = \text{صفرا}}$$

الباب الثاني
المعادلات والمتراجحات الجبرية

الفصل الأول : المعادلات

63) تمهيد : تنقسم المساويات الى قسمين

1 ") المطابقات وهي تتحقق مهما كانت قيم الحروف

مثال : $أ^2 - ب^2 = (أ + ب)(أ - ب)$

2 ") المعادلات وهي التي لا تتحقق الا اذا عوضنا الحروف بقيم معينة

مثال : 5 س $- 6 = 4$ س $+ 5$

لاتتحقق هذه المعادلة الا اذا عوضنا س بـ (11)

وتسمى الحروف في المعادلات بالمجاهيل

64) جذور المعادلة : هي اعداد جبرية اذا عوضنا بها المجاهيل تحققت المعادلة

65) درجة المعادلة : هي درجة المجهول

مثال : 5 س $- 6 = 4$ س $+ 5$

معادلة من الدرجة الاولى ذات المجهول الواحد

66) حل المعادلات : هو التفتيش عن جذورها - ويرتكز هذا التفتيش على النظريات الآتية

67) نظرية اولى : لا يتغير جذر معادلة اذا اضفنا الى طرفيها كمية واحدة مشتملة على مجهول او غير مشتملة عليه

مثال : 5 س $- 6 = 4$ س $+ 5$ جذرها س $= 11$

نضيف الكمية (7 س — 9) الى الطرفين

7 س — 9 + 5 س — 6 = 7 س — 9 + 4س + 6

الجذر هو   س = 11   ايضا

68) نتيجة : لا يتغير جذر معادلة اذا حولنا كمية من طرف المعادلة الى الطرف الآخر بشرط ان نغير علامة الكمية

5 س — 6 = 4 س + 5   الجذر   س = 11

نحول (— 6) الى الطرف الثانى

5 س = 4 س + 5 + 6

الجذر هو   س = 11   ايضا

69) نظرية ثانية : لا يتغير جذر معادلة اذا ضربنا او قسمنا طرفيها بكمية واحدة مغايرة للصفر

مثال :   5 س — 6 = 4 س + 5   س = 11

نضرب الطرفين في (س — 1)

(س — 1) (5 س — 6) = (س — 1) (4 س + 5)

5 س^2 — 11 س + 6 = 4 س^2 + س — 5

$$\underbrace{605 - 121 + 6}_{490} = \underbrace{484 + 11 - 5}_{490}$$

70) نتيجة : اذا اشتملت المعادلة على كسور مقاماتها عددية فانه يمكن الغاء المقام المشترك بعد التجنيس

مثال :

$$\frac{5\,\text{س} - 1}{3} - \frac{\text{س} + 1}{4} = \frac{2\,\text{س} - 3}{6}$$

نضرب الطرفين في (12) الذي هو المقام المشترك

4 (5 س — 1) — 3 (س + 1) = 2 (2 س — 3)

معادلات الدرجة الاولى ذات المجهول الواحد

71) الطريقة العملية لحل المعادلات : لحل معادلة من الدرجة الاول ذات المجهول الواحد نجرى العمليات الآتية :

1") اجراء العمليات المنصوص عليها ثم الاختصار

2) الغاء المقام المشترك اذا اشتملت المعادلة على كسور

3") حصر الحدود المشتملة على المجهول في طرف واحد والكميات المعلومة في الطرف الآخر

4") استخراج الجذر بقسمة طرفي المعادلة على مثل المجهول

مثال :
$$\frac{س - 1}{3} + \frac{4\ (س - 3)}{9} = \frac{5\ س + 1}{8}$$

التجنيس والغاء المقام المشترك و هو 72

$$24\ (\ س - 1\ ) + 8 \times 4\ (\ 2\ س - 3\ ) = 9\ (\ 5\ س + 1\ )$$

$$24\ س - 24 + 64\ س - 96 = 45\ س + 9$$

نقل المجهول الى الطرف الاول

$$24\ س + 64\ س - 45\ س = 9 + 96 + 24$$

$$43\ س = 129$$

$$س = \frac{129}{43} = 3$$

72) المعادلات الحرفية ذات المجهول الواحد من الدرجة الاولى:

بعد اجراء العمليات توضع المعادلة على الصورة الآتية :

$$\boxed{أس = ب}$$ أ ، ب عددان معلومان

المناقشة

اذا كان $أ \neq ٠$ فللمعادلة جذر واحد وهو $س = \frac{ب}{أ}$

واذا كان $أ = ٠$ فالمعادلة تصير $٠ \times س = ب$

1") اذا كانت ب مغايرة للصفر (ب $\neq$ 0) فالمعادلة تكون

0 $\times$ س $\neq$ صفر

لا يوجد عدد يحققها، فنقول ان المعادلة مستحيلة الحل او ليس لها جذر

2") اذا كانت ب $=$ 0 اصبحت المعادلة 0 $\times$ س $=$ 0

وهي محققة مهما كانت قيم س . فنقول ان المعادلة غير معينة يعني
ان جذورها هي الاعداد الجبرية بأكملها

<u>موجز المناقشة :</u>

أ س $=$ ب	1") أ $\neq$ 0	س $= \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$
	2") أ $=$ 0	ب $\neq$ 0 غير معينة
		ب $=$ 0 مستحيلة

الفصل الثاني — المعادلات الراجعة الى الدرجة الاولى

73) النوع الاول: المعادلات التي تحتوي على المجهول في مقاماتها

لا يكون لهذه المعادلات معنى الا اذا لم تعدم فيها المقامات - يوضع هذا الشرط قبل حل المعادلة ولا يقبل الجذر الا اذا كان موافقا لهذا الشرط

74) طريقة الحل :

1") تنقل جميع الكميات الى طرف واحد

2") نجنس الكسور ونجري العمليات في البسوط فتؤول المعادلة الى الصورة

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = 0 \quad (\text{أ، ب ثنائيات الحد})$$

3") يكون الكسر مساويا للصفر اذا كان بسطه مساويا للصفر ومقامه غايرا له

4") نحل المعادلة أ $= 0$

مع الملاحظة انه يشترط في الجذر ان لا يعدم المقام - فان اعدمه رفض

مثال :

$$\frac{\text{س} - 1}{\text{س} - 2} + \frac{\text{س} - 3}{\text{س} - 1} = 2 - \frac{3}{\text{س} - 1}$$

تنقل الكميات الى الطرف الاول :

$$\frac{\text{س} - 1}{\text{س} - 2} + \frac{\text{س} - 3}{\text{س} - 1} + \frac{3}{\text{س} - 1} - 2 = 0$$

نجنس ونجري العمليات في البسوط

$$\frac{(\text{س} - 1)^2 + (\text{س} - 2)(\text{س}) - 2(\text{س} - 1)(\text{س} - 2)}{(\text{س} - 1)(\text{س} - 2\,\text{س})} = 0$$

$$\frac{2\,\text{س} - 3}{(\text{س} - 1)(\text{س} - 2)} = 0 \qquad 2\,\text{س} - 3 = 0$$

الجذر هو: س $\frac{3}{2}$ وهو مقبول لانه لا يعدم المقـام

75) <u>النوع الثاني</u> : المعادلات من النوع أ. ب. ج = 0   أ، ب، ج ثنائيات الحد

<u>تـذكير :</u>   ليكون جداء مساويا لصفر بالنسبة للمجهول يكفي ان يكون أحد اضلاعه مساويا لصفر

جذور المعادلة أ. ب. ج = 0 هي جـذور المعادلات الجزئية

أ = 0   ب = 0   ج = 0

<u>مثال :</u>   (س — 2)(س — 7) = 0

1) س — 2 = 0   س = 2

2) س — 7 = 0   س = 7

تـمـــــارين

56) حل المعادلات الآتية :

1") 250 (س — 4) + 1250 (س + 1) = 500 (2س + 3) + 750

2") (2 س + 1) + (2 س + 3) + (س — 5) + (س — 1) = (3 س + 9) + س + 15

3") 8 (3 س — 5) — 5 (2 س — 8) = 4 (س — 1) + 16

4") (4 س — 3) (س — 1) = (2 س — 5) (2 س — 1)

5") (س — 3) (— 1) — (س —)^2 = 5 س — 11

6") (س + 1)^2 + (س + 2)^2 = (س + 3)^2 + (س — 4)^2

7") 12 (س — 3)^2 — (2س — 1)^2 = (4 س — 5) (2س + 1)

57) حل المعادلات الآتية بعد الغاء المقامات

1″) $\frac{7\text{س} - 5}{2} - \frac{8\text{س} - 6}{3} = \frac{3\text{س} + 7}{4} + 1$

2″) $\frac{\text{س}}{3} + \frac{5\text{س} + 1}{6} = \frac{1 - \text{س}}{4}$

3″) $\frac{(2\text{س} - 1)(\text{س} + 1)}{3} - \frac{(\text{س} - 3)^2}{4} = \frac{(5\text{س} - 1)(\text{س} + 1)}{12} + \frac{1}{3}$

4″) $\frac{(2\text{س} - 3)(2\text{س} + 3)}{8} = \frac{(\text{س} - 4)^2}{6} + \frac{(\text{س} - 2)^2}{3}$

5″) $\frac{(\text{س} - 1)^2 + (\text{س} - 2)^2}{(\text{س} - 3)^2 + (\text{س} - 4)^2} = 1$

6″) $\frac{2\text{س}^2 - 5\text{س} + 1}{\text{س}^2 + \text{س} - 3} = 2$

58) جِدْ قيمة العدد ن ليكون (2) جذر المعادلة :

$2\text{ن} - 3\text{س} + 5 = \text{ن} + 2\text{س} + 4$

59) جِدْ قيمة العدد ن ليكون جذر المعادلة :

$2\text{ن}\,\text{س} - 4\text{ن} + 1 = 3(\text{س} - 2\text{ن} - 1)$

احد الاعداد الآتية: س = 4   س = 1   س = صفر   س = — 1

60) حل المعادلات الآتية ثم اثبت هل ان الجذور صالحة ؟

1″) $\frac{3\text{س} + 2}{\text{س} - 1} + \frac{2\text{س} - 4}{\text{س} + 2} = 5$ $\qquad$ $\frac{3 + 8\text{س}}{3 - 4\text{س}} = \frac{5 - 16\text{س}}{1 + 8\text{س}}$

2") $\frac{\text{س}+3}{\text{س}-1}-\frac{\text{س}-3}{\text{س}+3}=\frac{12}{\text{س}^2-9}$ ؛ $\frac{1-9\text{س}}{5-6\text{س}}=\frac{3-6\text{س}}{5-4\text{س}}$

3") $\frac{1}{(6-\text{س})(\text{س}+3)}-\frac{2\text{س}-5}{6-\text{س}}=\frac{2\text{س}+1}{\text{س}+3}$

4") $\frac{3\text{س}-2}{5}+\frac{\text{س}-1}{9}=\frac{14\text{س}-3}{15}-\frac{2\text{س}+1}{9}$

5") $\frac{\text{س}-2}{\text{س}-3}+\frac{2\text{س}+11}{2\text{س}+9}=\frac{17}{(\text{س}-3)(2\text{س}+9)}$

6") $\frac{\text{س}+3}{2}-\frac{\text{س}-1}{3}=\frac{\text{س}+5}{6}+1$

7") $\frac{2\text{س}-1}{4}+\frac{\text{س}-3}{3}=\frac{4\text{س}-2}{3}-\frac{6\text{س}+7}{12}$

61) حل المعادلات الآتية :

1") $(\text{س}-2)(\text{س}+2)(\text{س}-4)=0$

$(2\text{س}-1)(2\text{س}+1)(2\text{س}+3)=0$

2") $(2\text{س}+5)(\text{س}-4)+(\text{س}-5)(\text{س}-4)=0$

$(2\text{س}-1)(\text{س}+3)=\text{س}^2-9$

3") $(2\text{س}+9)(\text{س}-4)=(4\text{س}^2-81)$

62) حل وناقش المعادلات الآتية :

1") $\text{أ}\text{س}+16=\text{أ}^2-4\text{س}$ ؛ $\frac{\text{س}}{\text{أ}-1}+\frac{\text{س}}{\text{أ}+1}=\frac{1}{\text{أ}^2-1}$

2") $\frac{\text{س}-2}{\text{أ}-1}-\frac{\text{س}}{\text{أ}^2-\text{أ}}=\frac{1}{\text{أ}}$ ؛ $\frac{\text{س}-\text{أ}}{\text{س}-\text{ب}}=\frac{\text{س}-4}{\text{س}-5}$

الفصل الثالث — سلسلات المعادلات

من الدرجة الاولى ذات المجاهيل

أ) معادلتان ذات مجهولين

76) تعريف: توضع هذه السلسلة في صورتها المختصرة كما يلي :

$$\begin{cases} أس + ب ص = ج & (1) \\ أ'س + ب'ص = ج' & (2) \end{cases}$$

س، ص هما المجهولان - أ ، ب ، ج ، أ' ، ب' ، ج' هي اعداد معلومة البحث عن حل السلسلة يكون هو البحث عن عددين اذا عوضنا بهما س،ص تحققت المعادلتان

77) طريقة الحل الاولى : التعويض :

يستخرج مجهول بالنسبة الى الآخر من احدى المعادلتين ويعوض بقيمته السابقة في المعادلة الاخرى التي تصبح معادلة فيها مجهول واحد

مثال :

$$\begin{cases} 4 \text{ س} - 3 \text{ ص} = 14 \\ 7 \text{ س} + 5 \text{ ص} = 45 \end{cases}$$

$$4 \text{ س} = 3 \text{ ص} + 14$$

$$\text{س} = \frac{3 \text{ ص} + 14}{4} \qquad (1)$$

ثم نعوض س بقيمته في المعادلة الثانية

$$7 \left(\frac{3 \text{ ص} + 14}{4} \right) + 5 \text{ ص} = 45$$

فنتحصل على معادلة من الدرجة الاولى ذات مجهول واحد

$$21 ص + 98 + 20 ص = 180$$

$$41 ص = 82$$

$$\boxed{ص = 2}$$

والآن نجد قيمة س بتعويض ص بـ (2) في المعادلة (1)

$$س = \frac{6 + 14}{4} \qquad \boxed{س = 5}$$

78) طريقة الالغاء بواسطة الجمع أو الطرح :

بعد جمع المعادلتين (1) و (2) طرفا طرفا نجد :

$$\begin{array}{lr} ص + س = 12 & \text{معادلة (1)} \\ ص - س = 2 & \text{معادلة (2)} \\ \hline 2 ص = 14 & \end{array} \quad +$$

حيث ان مَثَلي المجهول س متقابلان جمعنا المعادلتين فحذف س وهكذا نتحصل على معادلة ذات مجهول واحد (ص)

اذا طرحنا المعادلة الثانية من الاولى طرفا طرفا وجدنا

$$2 س = 10 \qquad \boxed{س = 5}$$

79) ملاحظة : هاته الطريقة ترجع الى تكوين مثلين متقابلين لاحد المجهولين او متساويين

مثال :
$$\begin{cases} 5 س - ص = 4 \\ 2 س + 3 ص = 22 \end{cases}$$

نضرب طرفي المعادلة الاولى في (+3) لنتحصل على مثلين متقابلين لـ (ص)

$$\begin{array}{l} 15 س - 3 ص = 12 \\ 2 س + 3 ص = 22 \\ \hline 17 س = 34 \end{array} \quad +$$

$$س = \frac{34}{17} \qquad \boxed{س = 2}$$

نضرب طرفي المعادلة الاولي في (2) وطرفي الثانية في (5) وبعد طرح الثانية من الاولى نتحصل على:

— { 10 س — 2 ص = 8
10 س + 15 ص = 110

— 17 ص = — 102 }

ص = $\frac{-102}{-17}$ = + 6

80) مثـال 2 { 4 س — 3 ص = 14
7 س + 5 ص = 45 }

لالغاء (ص) نضرب طرفي المعادلة الاولى في (5) وطرفي المعادلة الثانية في(3) ولالغاء (س) نضـرب طرفي المعادلة الاولى في (+ 7) وطرفي المعـادلة الثانية في (— 4)

+ { 20 س — 15 ص = 70
21 س + 15 ص = 135

41 س = 205 }

+ { 28س — 21 ص = 98
— 28س — 20 ص = — 180

— 41 ص = — 82 }

س = $\frac{205}{41}$ = 5 ص = $\frac{82}{41}$ = 2

ثلاث معادلات ذات ثلاثة مجاهيل

81) طريقة الحل : نطبق طريقة التعويض لالغـاء مجهولين الواحد بعد الآخر فنتحصل في النهاية على معادلة ذات مجهول واحد

مثال : { 2 س + ص — 4 ط = 1
س + 4 ص — 5 ط = 2
4 س — ص + 2 ط = 3 }

نستخرج ص من المعادلة الاولى

ص = 4 ط — 2 س + 1

ونعوض ص بقيمته في المعادلتين الاخرتين

س + 16 ط — 8 س + 4 — 5 ط = 2
4 س — 4 ط + 2 س — 1 + 2 ط = 3

— 7 س + 11 ط = — 2
6 س — 2 ط = 4

وهي سلسلة معادلتين ذات مجهولين نعرف طرق حلها

82) **طريقة الالغاء بواسطة الجمع او الطرح:** لا يمكن اتباعها الا في بعض حالات خاصة

مثال :

2 س + ص + ط = 1 (1)
س + 2ص + ط = 1 (2)
س + ص + 2 ط = 1 (3)

بعد جمع المعادلات طرفا طرفا: 4 س + 4ص + 4ط = 3

س + ص + ط = $\frac{3}{4}$ (4)

نطرح المعادلة (4) من المعادلة (1) فنتحصل على (س) ثم من المعادلة (2) فنتحصل على (ص) ثم من المعادلة (3) فنتحصل على ط

س = $\frac{1}{4}$ ص = $\frac{1}{4}$ ط = $\frac{1}{4}$

تمارين

المطلوب حل سلسلات المعادلات الآتية :

63) س + 11 ص = 35 ، س + 4 ص = 14
س — 3 ص = 14 ، س + 2 ص = 24

64) 5 س — 2ص = 39 ، 3 س + 2ص = 33
4 س — 2 ص = 32 ، 3 س — ص = 16

65) س — ص = 2 ، س + ص = 12
5 س + 3ص = 24 ، 5 س — 3ص = 6

66) 3 س — 5ص = 11 ، س + 2ص = 11
6 س — 7 ص = 106 ، 4 س — 12 ص = 56

اختزل المعادلات الآتية ثم حل السلسلات الحاصلة :

67) 27 س — 18 ص = 54 ، 40 س + 32 ص = 256
42 س — 21 ص = 147 ، 33 س + 44 ص = 418

68) 15 س — 8ص = 97 ، 12 س + 6ص = 90
21 س + 12ص = 141 ، 14 س — 9 ص = 43

69) 2 س + 3 ص = 2 ، 8 س — 9 ص = 1
2 س + 4 ص = 4 ، 3 س + 7 ص = 4

المطلوب حل السلسلات الآتية :

70) س + ص + ط = 31 ، س + ص — ط = 21 ، س — ص + ط = —3
6 س — ص + 5 ط = 73 ، 5 س + ص — ط = 31 ، 2 س — 3 ص — 4ط = 15

71) س + ص — ط = 26 ، س — ص + ط = 18 ، — س + ص + ط = 6
2 س + 3ص = 19 ، 2 ص — 5ط = —34 ، 3 س + 4 ط = 47

الفصل الرابع — المتراجحات

83) تعريف: نقول ان العدد (أ) اكبر من العدد (ب) اذا كان الفرق (أ ـ ب) اكبر من الصفر ـ فنكتب :

$$أ > ب \qquad (1)$$

ونقول ان العدد (أ) اصغر من العدد (ب) اذا كان الفرق (أ ـ ب) اصغر من الصفر ـ فنكتب :

$$أ < ب \qquad (2)$$

كل من الصورتين (1) و (2) تسمى متراجحة

المتراجحات العددية

84) نظرية اولى : لايتغير اتجاه متراجحة اذا اضفنا عددا واحدا الى طرفيها

اذا فرضنا ان : $أ > ب$ أي $أ - ب > 0$

لا يتغير فرق عددين باضافة عدد واحد اليهما

$$(أ + ج) - (ب + ج) > 0$$

وهذا يدل على ان

$$أ + ج > ب + ج$$

85) نتيجة : يمكن تحويل عدد من طرف متراجحة الى الطرف الآخر بشرط ان نغير علامته

اذا كان $أ + ب > ج$

نضيف (ـ ب) الى الطرفين :

$$أ + ب - ب > ج - ب$$

أو $أ > ج - ب$

86) نظرية ثانية : لا يتغير اتجاه متراجحة اذا ضربنا (او قسمنا) طرفيها في عدد موجب مغاير للصفر .

أ > ب   أي   أ ــ ب > 0

اذا ضربنا الفرق الموجب في عدد موجب (ج) تحصلنا على عدد موجب

أ ج ــ ب ج > 0   ج > 0

حينئذ   أ ج > ب ج

87) نظرية ثالثة : اذا ضربنا (او قسمنا) طرفي متراجحة في عدد سالب مغاير للصفر فان اتجاهها يتغير .

أ > ب   أي   أ ــ ب > 0

اذا ضربنا الفرق الموجب في عدد سالب تحصلنا على عدد سالب

أ د ــ ب د < 0   د < 0

حينئذ   أ د < ب د

متراجحات الدرجة الاولى ذات المجهول الواحد

88) تعريف : متراجحات الدرجة الاولى هي المتراجحات التي تربط بين جملتين جبريتين مشتملتين على مجهول واحد من الدرجة الاولى

مثال :   3 س ــ 5 < 2 (س + 1)

89) حل المتراجحات : هو الوصول الى مجموعة اعداد تحقق المتراجحة اذا عوضنا المجهول بأحد تلك الاعداد

ويرتكز حل المتراجحات على النظريات السابقة

90) الطريقة العملية لحل المتراجحات :

1") اجراء العملية المنصوص عليها

2") الغاء المقامات ان كانت عديدية على شرط ان يكون المقام المشترك موجبا

3") حصر المجهولات في طرف ـ فنصل الى متراجحة من النوع:

أ س > ب

4") المناقشة :

اذا كان أ > 0 فان الحل هو س > ب/أ

واذا كان أ < 0 فان الحل هو س < ب/أ

مثال : س/3 — 1/4 > 3 س/4 — 2/3

نضرب الطرفين في (12) لالغاء المقامات

4 س — 3 > 9 س — 8

4 س — 9 س > — 8 + 3

— 5 س > — 5

س < 1

91) المتراجحات الراجعة الى الدرجة الاولى:

هي متراجحات ليست من الدرجة الاولى ولكن حلها يرجع الى متراجحات من الدرجة الاولى

92) النوع الاولى : أ، ب، ج > 0

أ، ب، ج كميات من الدرجة الاولى بالنسبة الى المجهول

طريقة الحل هي :

1") درس علامات العوامل أ، ب، ج ، . . .

2") تسجيل النتائج في جدول يسمى جدول العلامات

3") استخراج علامة الجداء

4") الجواب

مثال : (س — 1) (س — 2) (س — 3) (س — 4) < 0

(س — 1) > 0 إذا كان س > 1

س — 2 > 0 » » س > 2

س — 3 > 0 » » س > 3

س — 4 > 0 » » س > 4

س	−∞ 1	2	3	4	+∞
س — 1	—	+	+	+	+
س — 2	—	—	+	+	+
س — 3	—	—	—	+	+
س — 4	—	—	—	—	+
الجـداء	+	—	+	—	+

الحـل هو : { 1 < س < 2 أو 3 < س < 4 }

93) النوع الثـاني : $\frac{أ}{ب}$ > 0 أو $\frac{أ}{ب}$ < 0

أ ، ب كميتان من الدرجة الاولى بالنسبة للمجهول

طريقة الحـل :

الحل راجع الى درس علامة $\frac{أ}{ب}$

وحيث ان علامة $\frac{أ}{ب}$ هي علامة الجداء أ . ب فحلول المتراجحة $\frac{أ}{ب}$ < 0

هي حلول المتراجحة أ . ب < 0 التي هي من النوع الاول .

تمـــــــــارين

المطلوب حل المتراجحات الآتية

72) $3 + \text{س} \leq 5 - \text{س}\,2$ $\qquad$ $3 - \text{س} > \text{س}\,2 - 5$

73) $\frac{\text{س} - 2}{3} > \frac{3 - \text{س}\,2}{5}$ $\qquad$ $\text{س} - \frac{1}{4} > \frac{1 - \text{س}}{5} - \text{س}2$

74) $\frac{2}{3} + \text{س} > \frac{3}{5} + \text{س}\,5$ $\qquad$ $\frac{\text{س}\,3 - 2}{3} > 1 - \text{س}\,4$

75) $\frac{1 - \text{س}\,2}{3} < \frac{\text{س}}{4} - 5$ $\qquad$ $\frac{1 + \text{س}\,4}{2} < \frac{2 - \text{س}}{3}$

76) $5 - \text{س} < 2 - \text{س}\,4$ $\qquad$ $1 + \text{س} < 3 - \text{س}\,2$

77) $3 + \text{س} < 3 - \text{س}\,2$ $\qquad$ $2 + \text{س} < 4 - \text{س}\,3$

78) $1 - \text{س} < \frac{5 - \text{س}\,4}{3}$ $\qquad$ $\frac{1 + \text{س}\,4}{10} < \frac{2 - \text{س}}{3}$

79) $\frac{1}{3} + \frac{\text{س}}{5} < \frac{1}{4} - \frac{\text{س}}{3}$ $\qquad$ $\frac{1}{3} - \frac{\text{س}}{5} < \frac{1}{4} + \frac{\text{س}}{3}$

80) $1 < \frac{\text{س}}{1 - \text{س}}$ $\qquad$ $1 > \frac{\text{س}}{2 - \text{س}}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} - < \frac{\text{س}\,3}{3 - \text{س}}$

81) $2 < \frac{1 - \text{س}\,4}{5 - \text{س}}$ $\qquad$ $\frac{2}{5} < \frac{2 - \text{س}}{3 - \text{س}}$ $\qquad$ $1 - < \frac{\text{س} - 4}{\text{س}3 - 2}$

82) $4 > \frac{1 - \text{س}2}{3 + \text{س}}$ $\qquad$ $3 > \frac{2}{\text{س}} - 1$

الفصل الخامس — المشاكل الجبرية

94) تعريف: المشاكل الجبرية هي مشاكل حسابية او هندسية تحل بطريقة الجبر

95) طريقة الحل :

1") قراءة النص وفهمه جيدا
2") انتخاب المجهول او المجهولات
3") وضع المعادلة او السلسلة الجبرية عند اللزوم
4") حل المعادلة او السلسلة ومناقشتها
5") المناقشة الهندسية او الحسابية لتحقيق صلوحية الحل بالنسبة الى المعنى الحسابي او الهندسي المطلوب

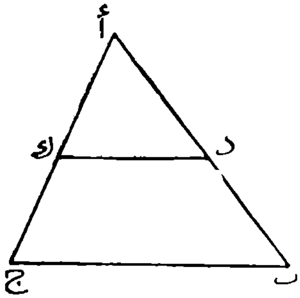
96) مثال اول : سن رجل 29 سنة وسن ابنه 5 اعوام - بعد كم سنة تكون سن الراجل ثلاثة اضعاف سن الابن؟

1") المجهول : س عدد السنوات المطلوبة
5") المعادلة : بعد س سنوات اصبحت سن الاب (29 + س)
وسن الابن (5 + س)
حينئذ 29 + س = 3 (5 + س)
3") حل المعادلة: 29 + س = 15 + 3 س
2 س = 14
س = 7

4") التحقيق : 29 + 7 = 36
5 + 7 = 12   36 = 3 × 12

97) مثال ثان : هب مثلثا أ ب ج اضلاعه تساوي :

ب ج = 13 م   أ ج = 15 م   أ ب = 11 م
على الضلع أ ب نعتبر النقطة (د) ونرسم منها موازيا للقاعدة ب ج يقطع الضلع أ ج في (ك) - فالمطلوب تعيين موقع النقطة (د) لتحقيق العلاقة
دك = ب د + ج ك



(ش 5)

1") المجهول : ب د = س

2") المعادلة : يجب التفتيش عن طولي القطعتين دك، جك بالنسبة لـ (س)

نطبق نظرية « طالاس » على المثلث أ ب ج

$$\frac{\text{ب د}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{جك}}{\text{أ ج}} \quad \text{او} \quad \frac{\text{س}}{11} = \frac{\text{ج ك}}{15}$$

حينئذ ب د = س $\qquad$ $\text{جك} = \frac{15}{11}\,\text{س}$

حيث ان المثلثين أ ب ج، أ د ك متشابهان فان

$$\frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{دك}}{\text{ب ج}} \quad \text{او} \quad \frac{11 - \text{س}}{11} = \frac{\text{دك}}{13}$$

حينئذ $\qquad \text{د ك} = \frac{13\,(11 - \text{س})}{11}$

فالمعادلة هي : $\quad \frac{13}{11}\,(11 - \text{س}) = \text{س} + \frac{15}{11}\,\text{س}$

3") حل المعادلة

$13\,(11 - \text{س}) = 11\,\text{س} + 15\,\text{س}$ ؛ $11\,\text{س} + 15\,\text{س} + 13\,\text{س} = 143$

$39\,\text{س} = 143 \qquad \text{س} = \frac{143}{39} = \frac{11}{3}$

4") التحقيق : $\text{ب د} = \frac{11}{3} \qquad \text{كج} = \frac{15 \times 11}{11 \times 3} = 5$

$$\text{د ك} = \frac{13}{11}\left(11 - \frac{11}{3}\right) = 13\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{26}{3}$$

$$\frac{11}{3} + 5 = \frac{11}{3} + \frac{15}{3} = \frac{26}{3}$$

تمـــــــارين

أ) مشـاكل حسـابية

83) جِدْ عددا إذا علمت ان الفرق بين قَسَمه على $\frac{3}{4}$ وسطحه فى $\frac{3}{5}$ يساوي 420

84) جِدْ 5 أعداد فردية متوالية إذا علمت مجموعها 905

85) لك عدد؛ اذا أضفت الى نصفه اربعة اخماسه $\left(\frac{4}{5}\right)$ و طرحت ثمن $\left(\frac{1}{8}\right)$ العدد من المجموع تحصلت على نتيجة تفوق العدد الاصلي بـ(1190) فماهو هذا العدد؟

86) الفـرق بيـن عددين هـو 180 ـ واذا اضفت (4) الى كل واحد منهما صار الاكبر يساوي اربعة امثال الاصغر ـ فما هما العددان ؟

87) لك الكسر $\frac{13}{23}$ فما هو العدد الذي اضيف الى البسط وطرح من المقـام جعل الكسر مساويا لـ $\left(\frac{5}{7}\right)$

88) لك كسر الفرق بين بسطه ومقامه (33) اذا اضفت (6) الى حدّي الكسر صار مساويا لـ $\left(\frac{1}{4}\right)$ جِد الكسر ؟

89) اقسم 86،200 د على ثلاثة اسهم بحيث يساوي السهم الثـاني نصف السهم الاول ويفوق السهم الثالث الاول بـ (15،800 د)

90) تقاسم شريكان مبلغا قدره 52،256 د ـ فصرف الاول $\left(\frac{2}{9}\right)$ من سهمه وصرف الثـاني $\frac{1}{5}$ سهمه وبقي لهما مبلغ واحد ـ فما هي قيمـة سهم كل واحد ؟

91)تقاسم ثلاث شركاء 27 دينارا بحيث ان سهم الثاني كان $\frac{2}{5}$ سهم الاول وان سهم الثالث كان مساويا لنصف مجموع السهمين الآخرين ـ ما هو سهم كل واحد ؟

92) تقاسم ثلاث شركاء ارضا فكان سهم الاول $\frac{3}{8}$ المساحة كلها وكان السهم الثاني $\frac{1}{3}$ الباقي مع زيادة 530 آر وكان سهم الثالث 2.775 $م^2$ ـ ما هي مساحة الارض وما هو قسط كل شريك

93) سن ولد هو 1/3 سن ابيه ـ ومنذ 7 سنوات خلت كان سن الابن 1/5 سن الاب ـ ما هو سن الاب وما هو سن الابن؟

94)منذ 3 سنوات خلت كان سن علي $\frac{1}{3}$ سن عمر ـ وبعد 9 سنوات ابتداء من الآن يكون سن علي $\frac{1}{2}$ سن عمر ـ ما هو سن علي ـ وما هو سن عمر في يومنا هذا ؟

95) سن اب هو 50 عاما وسن ابنائه الاربعة 21 ، 18 ، 15 ، 14 عاما متى كان (او متى يكون) سن الاب مساويا لمجموع اسنان ابنائه

ب) مشاكل هندسية

96) اضلاع مثلث هي ب ج = 15 م أ ج = 12 م أ ب = 18 م من النقطة ك على الضلع أب نرسم موازيا للقاعدة ب ج فيقطع أ ج في (و) ـ عين موقع ك بحيث ان ك و = ب ك ـ و ج ؛ ك و = ب ك ـ 2 و ج

97) هب مثلثا أ ب ج قاعدته ب ج = 8 م وارتفاعه أ هـ = 4 م وارسم في المثلث مسطيلا مكون رأساه (و ، ن) كائنان على ب ج والراس (م) على (أ ب) والراس (ك) على (أ ج) اذا علمت ان محيطه يساوي 12 م.

98) هب ثلاث نقط أ ب ج على محور احداثياتها هي $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ ، $\overline{ج}$ ـ جد على المحور نقطة (م) خاضعة العلاقة $\overline{مأ}^2 = \overline{مب} \times \overline{مج}$
ما هو موقع النقطة (أ) ليكون المشكل مستحيلا ؟

الباب الثالث

التَّـوابِـع

الفصل الأوّل — تعريفات وخصائص هامة

98) تعريفـات :

أ) نقول ان (ص) هو تابع لـ (س) اذا تعين (ص) بمعرفة (س)

ب) س يسمي المتحول

ج) مفهوم التابع : يتضح بالامثلة الآتية :

امثلـة ـ سعر نسيج تابع لطوله

ـ مساحة مربع تابعة لطول ضلعه

ـ طول قطعة من حديد تابع لدرجة حرارته

ـ ضغط كمية من الهواء تابع لحجمها وحرارتها

99) العلاقة بين التابع والمتحول

العلاقة الرابطة بين كميتين متحركتين هي معادلة جبرية

مثال : ص $=$ أ س أو ص $=$ أ $س^2$ $+$ ب س $+$ ج الخ

بصفة عامة نلخص الروابط بين ص ، س بالرمز الآتي

$$\boxed{ص = تا(س)}$$

ص يسمي التابع س يسمى المتحول

100) بعض توابع معتبرة :

أ) التابع من الدرجة الاولى او التابع الخطي

ص $=$ أ س $+$ ب أ ، ب عددان ثابتان

ب) التابع من الدرجة الثانية او التابـع الثلاثي

$$ص = أس^2 + ب س + ج$$

ج) التابع التناظري : $ص = \frac{أس + ب}{أ'س + ب'}$

101) تعين التوابع : مجموع قيم س التي يتعين بهــا ص يسمى مجــال تغييراته

مثال 1 يتعين $ص = أس + ب$ مهما كان س

فمجال تغييراته هو س (— ∞ ، + ∞)

مثال 2 $ص = \sqrt{1 - س}$

لا يتعين ص الا اذا كان س < 1 فالمجال هو س (— ∞ ، + 1)

اتجاه تغييرات التـوابـع

102) تابـع موافق(1): تقول ان التابــع ص = تا (س) هو تــابـع موفــق اذا كان اتجاه تغييراته موافقا لاتجاه تغييرات المتحول (س)

مثال :

س	1	2	3	4	5	6
ص = س + 2	3	4	5	6	7	8

103) تابـع معــاكس (2) : تقول ان التابع ص = تا (س) هو تابع معاكس اذا كان اتجاه تغييراته معاكسا لاتجاه تغييرات المتحول (س)

مثال :

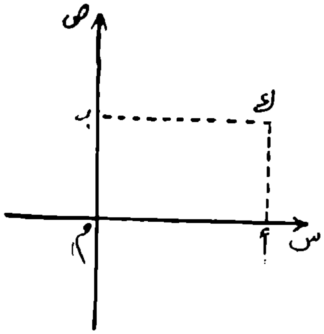
س	1	2	3	4	5	6
$ص = \frac{1}{س}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$

104) تــابع قار : تقول ان التابع ص هو تابع قار اذا لم يتغير مهما تحول (س)

تنبيــه : (1) جري فيه الاستعمال الى حد الآن بعبارة «تابع تصاعدي او متزايد» لتسمية هذا النوع
(2) جرى فيه الاستعمال كذلك بعبارة «تابع تنازلي أو متناقص»
وقد رأينا ما اصطلحنا عليه ألصق بحقية التعريف.

الفصل الثاني — التمثيل البياني لتغيرات التوابع

105) تعيين موقع نقطة في مستوٍ :



(ش 6)

يتعين موقع نقطة في مستوى بمعرفة عديها عن محورين متعامدين من ذلك المستوى

م : اصل الاحداثيات

المحوران مس ، مص يكونان منتظم الاحداثيات

ب مسقط (أ) على مس ؛ ج مسقط (أ) على مص

106) تعريف : $\overline{\text{مب}}$ يسمى فصل النقطة أ
$\overline{\text{مج}}$ يسمى ترتيب النقطة أ

الفصل والترتيب هما احداثيا النقطة (أ) ـ فتتعين النقطة (أ) بمعرفة احداثييها وهما عددان جبريان

107) اصطلاح: نرمز الى الاحدثيين بالاصطلاحات الآتية :

$\overline{\text{مب}} = \text{س}$ $\qquad$ $\overline{\text{مج}} = \text{ص}$

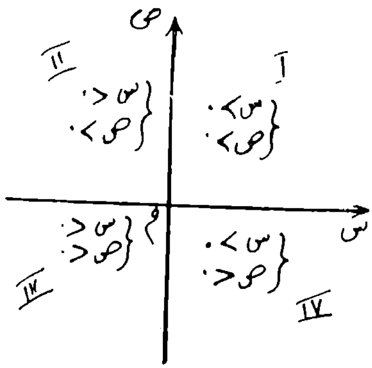
فنكتب : أ (س،ص)

مثلا : أ : (-2، $+1$)

ونسمي مس محور السينات ومص محور الصادات

108) ملاحظة أولى : يقسم المحوران المستوي الى اربعة زوايا قائمة تسمى :

الربع الاول والربع الثاني والربع الثالث والربع الرابع



في الربع الاول الاحداثيان موجبان

في الربع الثاني الفصل سالب والترتيب موجب

في الربع الثالث الاحداثيان سالبان

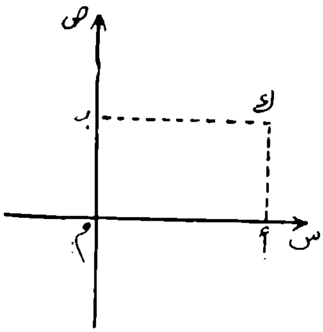
في الربع الرابع الفصل موجب والترتيب سالب

(ش 7)

109) ملاحظة ثانية : اذا كانت النقطة (أ) على المحور م س فان ترتيبها يساوي صفرا : ص = 0

واذا كانت النقطة (أ) على المحور م ص فان فصلها يساوي صفرا :

س = 0



(ش 8)

110) حالة خاصة : احداثيا نقطة الاصل م هما

س = 0 ص = 0

111) نظرية : تتعين نقطة (ك) بمعرفة فصلها وترتيبها

مثال : (ش 8)

س = + 5 ص = + 3

112) نظرية العكس : يقابل عددين جبريين نقطة واحدة على مستوي

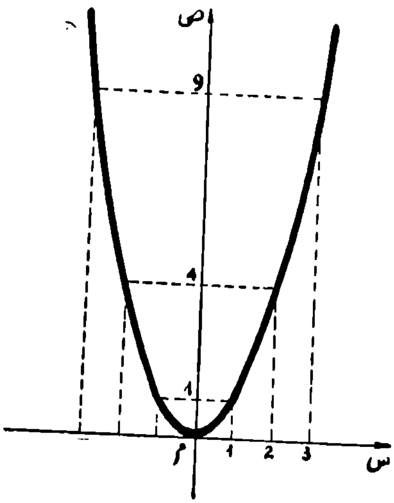
مثال : لو علمنا عددين (+ 5 ; + 3) لعيّنا النقطة (أ) على المحور م س

$\overline{\text{م أ}} = + 5$

والنقطة (ب) على المحور م ص $\overline{\text{م ب}} = + 3$

أ ، ب هما مسقطا نقطة واحدة (ك) على المحورين احداثياها :

س = + 5 ص = + 3



(ش 9)

113) <u>التمثيل البياني:</u>

نعتبر مثلا التابع ص = س ^{2}

لكل قيمة تأخذها (س) نجد

قيمة لـ (ص) والعددان س ، ص

يعينان نقطة على المستوي

س	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$
ص	$+6$	$+4$	$+1$	0	$+1$	$+4$	$+9$

إذا تغير (س) تغير ص وتحركت النقطة على المستوى (م س ، م ص)

فاحدثت خطا منحنيا نسميه <u>الخط البياني</u> لتغييرات التابع

114) <u>نظرية :</u> إذا اعتبرنا التابع ص = تا (س) وخطه البياني فان :

1") جميع نقط المنحني لها احداثيات مربوطة بالعلاقة ص = تا (س)

2") كل نقطة احداثياها خاضعان للعلاقة ص = تا (س) كائنة على الخط البياني

تمـــــارين

99) وقع وزن طفل كل اسبوعين فاسفر ذلك عن النتائج الآتية

4،70 ; 4،30 ; 3،90 ; 3،60 ; 3،25 ; 2،75 ; 3

6،75 ; 6،55 ; 6،25 ; 5،95 ; 5،65 ; 5،30 ; 5

8،30 ; 8،15 ; 7،90 ; 7،70 ; 7،50 ; 7،25 ; 7

8،90 ; 8،75 ; 8،65 ; 8،50

فالمطلوب رسم الخط البياني لتغييرات ثقل الطفل بالنسبة لعمره

100) وقع وزن طفل كل يوم بعد ولادته فاسفر ذلك عن النتائج الآتية

3،05 ; 3 ; 2،98 ; 3 ; 3،10 ; 3,20 ; 3،35

3،35 ; 3،31 ; 3,28 ; 3،25 ; 3،20 ; 3،15 ; 3،11

3،40 ; 3،38

فالمطلوب رسم الخط البياني لتغييرات ثقل الطفل بالنسبة لعمره

101) أ) ما هو موقع جميع النقط التي يساوي فصلها (+ 3) ؟

ب) ما هو موقع جميع النقط التي يساوي ترتيبها (+ 5) ؟

ج) ما هو موقع جميع النقط التي يساوي فصلها صفرا ؟

د) ما هو موقع جميع النقط التي يساوي ترتيبها صفرا ؟

102) ما هو موقع جميع النقط التي يساوي فصلها ترتيبها ؟

ما هو موقع النقط التي يكون فصلها وترتيبها عددين متقابلين ؟

103) المطلوب رسم الخط البياني للتوابع الآتية :

$$ص = 2\,س^2 \qquad ص = \frac{1}{س} \qquad ص = \frac{س^2}{2}$$

$$ص = س^2 - 3 \qquad ص = س^2 - س \qquad ص = 5\,س - 9$$

باتباع الطريقة المباشرة (اي : تعيين عدد كاف من النقط) .

الفصل الثالث – التابع الخطي ص = أس + ب

أ) البحث الجبري

115) **مجال التغيرات:** التابع ص معين مهما كانت قيمة س ، فمجال تغيرات س هو (— ∞ ؛ + ∞)

116) **نظريـة :** اذا كان (أ) موجبا فان التابع ص = أس + ب هو تابع موافق واذا كان (أ) سالبا فان التابع هو تابع معاكس

مثال 1 ص = 3 س — 4

س	—3	—2	—1	0	1	2	3
ص	—13	—10	—7	—4	—1	2	5

ميثال 2 ص = — س + 5

س	1	2	3	4	5	6	7
ص	4	3	2	1	0	—1	—2

117) البحث عن قيم ص عندما يتناهي س الى — ∞ أو + ∞ :

ص = أس + ب

1") س ⟵ +∞ { أ > 0 ص ⟵ +∞ ؛ أ < 0 ص ⟵ —∞ }

2") س ⟵ —∞ { أ > 0 ص ⟵ —∞ ؛ أ < 0 ص ⟵ +∞ }

3") قيمة (س) التي تصفر (ص) هي

أس + ب = 0   أس = — ب   س = — $\frac{ب}{أ}$

118) جدول التغيرات : ياخـض البحث الســابـق في جـدول يسمـى
جدول التغيير ات

1") أ > 0

س	$-\infty$		$-\frac{ب}{أ}$		$+\infty$
ص	$-\infty$	↖	صفر	↖	$+\infty$

2") أ < 0

س	$-\infty$		$-\frac{ب}{أ}$		$+\infty$
ص	$-\infty$	↙	صفر	↙	$-\infty$

تنبيه : الرمز ↖ يدل على ان التابع موافق

الرمز ↙ يدل على ان التابع معاكس

ب) التمثيل البياني

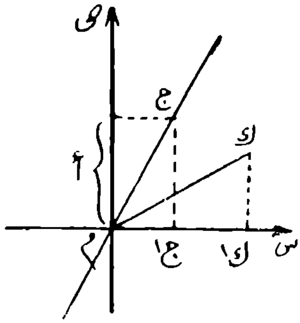
الحـالـة الاولى : ص $=$ أ س

119) نظر يــة : المنحني البياني لتغييرات التابع ص $=$ أ س هـ و مستقيم يمر من نقطة الاصل

1") المنحني البيانى يمرمن نقطة الاصل وذلك لانه اذا اخذنا

س $= 0$ فان ص $= 0$

فالنقطة الاولى من المنحني هي (0،0)



(ش 10)

2") النقطة الثانية :

اذا اخذنا س = 1 فان ص = أ

فالنقطة الثانية هي : ج (1، أ)

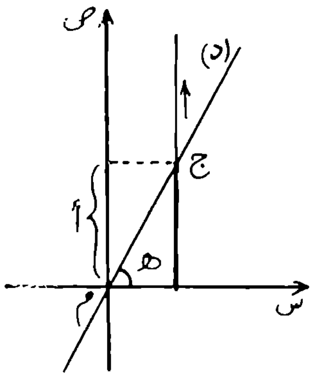
3") النقطة الثالثة : نفرض ان النقطة الثالثة هي ك (س، ص) و نريد ان نقيم الدليل على ان (ك) هي نقطة من المستقيم م ج. لذلك نعتبر المثلثين القائمين م ج' ج ، م ك' ك

وحيث ان : $\frac{\overline{م ج'}}{\overline{ج ج'}} = \frac{1}{أ}$

$$\frac{\overline{م ك'}}{\overline{ك' ك}} = \frac{س}{ص} = \frac{س}{أ س} = \frac{1}{أ}$$

فـان : $\frac{م ج'}{ج' ج} = \frac{م ك'}{ك' ك}$ والمثلثان م ج ج' ، م ك ك' متشابهان

حينئذ $\widehat{ج' م ج} = \widehat{ك' م ك}$ ـ ك هي نقطة من المستقيم م ج



(ش 11)

120) __الميـلان :__ نعتبر التـابع : ص = أ س

إذا تغير العامل (أ) دار المستقيم م ج حول م وتغيرت الزاوية (هـ)

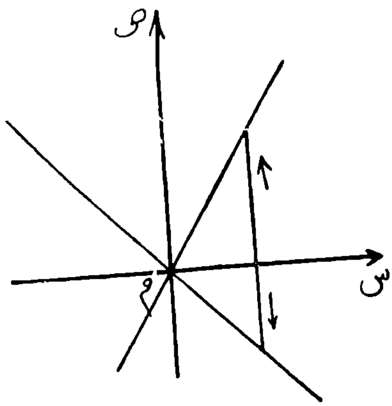
لذلك يسمى العدد (أ) ميلان المستقيم ص = أس او العامل الزاوي

1") أ > 0 المستقيم (د) يكون في الربع الاول والربع الثالث

2") أ < 0 المستقيم (د) يكون في الربع الثاني والربع الرابع

121) بعض قيم معتبرة للميلان :

أ = 0 المستقيم (د) منطبق على المحور م س ($\widehat{هـ}$ = 0)



(ش 12)

أ = 1 المستقيم (د) منطبق على منصف الربع الاول

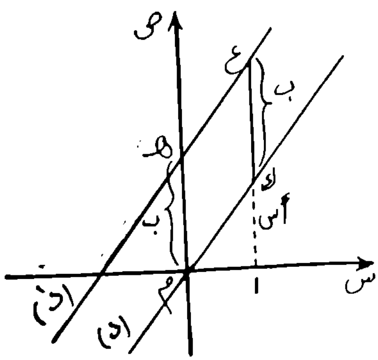
أ = ـ 1 المستقيم (د) منطبق على منصف الربع الثاني

أ ← + ∞ : المستقيم (د) يدور حول (م) حتى ينطبق على م ص

أ ← ـ ∞ المستقيم (د) ينطبق على م ص′

ج) الحالة العامة ص = أ س + ب

122) نظرية : المنحني البياني الممثل لتغييرات التابع ص = أ س + ب هو مستقيم مواز للمستقيم ص = أ س



ش 13)

على المستقيم (د) ص = أ س نعتبر النقطة ك ثم نمدد ك′ك الى ك ع بحيث ان $\overline{كع}$ = ب

فترتيب النقطة ع هو ص = أ س + ب

ع هي حينئذ على المنحني البياني للتابع ص = أ س + ب

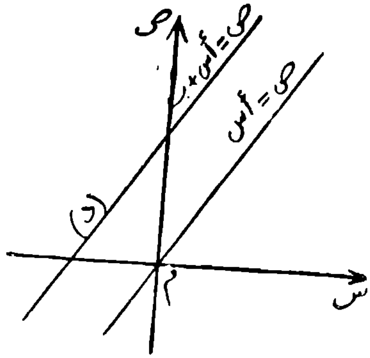
إذا تحرك (ك) على المستقيم ص = أ س تحركت (ع) على مستقيم مواز له .

123) بناء المنحني البياني: بما ان المنحني الممثل لـ ص = ا س + ب هو مستقيم ـ يتعين الخط بمعرفة نقطتين منه ـ واحدى النقطتين هي (هـ)

(س = 0 ص = ب)

124) ميلان المستقيم $ص = أس + ب$: هو ميلان المستقيم $ص = أس$ الموازي له اي (أ)

125) حالات معتبرة :



(ش 14)

1") $أ = 0$ (د) يوازي م س

2") $أ = 1$ (د) يوازي منصف الربع الاول

3") $أ = -1$ (د) يوازي منصف الربع الثاني

4") $أ \longrightarrow \infty$ (د) يوازي م ص

126) تعريف : الرابطة $ص = أس + ب$ تسمى معادلة المستقيم (د)

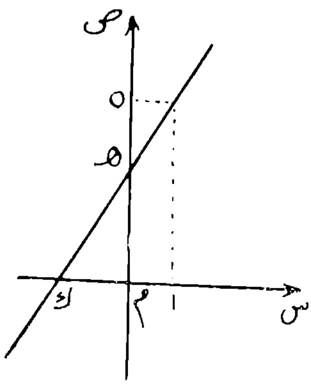
فمعادلة المستقيم هي رابطة من الدرجة الاولى

وبالعكس كل رابطة من الدرجة الاولى ($أس + ب ص + ج = 0$)

بين س ، ص هي معادلة مستقيم

127) مثال : ارسم الخط البياني لتغيرات التابع

$$ص = 2 س + 3$$



(ش 15)

يكفي ان نعين نقطتين من المستقيم

1") النقطة ج :

$$ج \begin{cases} س = 1 \\ ص = 5 \end{cases}$$

2") النقطة ك وهي تقع في تقاطع (د) مع م س

ترتيبها يساوي صفرا ، حينئذ فصلها يساوي :

$$2 س + 3 = 0 \qquad س = -\frac{3}{2} \qquad ك \begin{cases} س = -3/2 \\ ص = 0 \end{cases}$$

تمـــــــــارين

المطلوب رسم الخطوط البيانية للتوابـع الآتية :

104) ص = ٢ س   ص = — 2 ص

ما هو موقع ذ نك المستقيمين بالنسبة لمحور السينات؟ بالنسبة لمحور الصادات؟

105) ص = 5 س   ص = $\frac{1}{5}$ س

ما هو موقع ذينك المستقيمين بالنسبة لمنصف الزاوية $\widehat{\text{س و ص}}$

106) ص = 3 س   ص = — $\frac{1}{3}$ س

برهن ان المستقيمين متعامدان

107) ما هي معادلة المستقيمات المارة من نقطة الاصل(م)ومن احدى النقط الآتية :

أ (3 ، 6)   ب (— 3 ، + 2)   ج (3 ، — 2)

108) المطلوب رسم الخط البياني لتغييرات سعر نسيـج بالنسبة لطـوله اذا علمت ان سعر 0 5 ، 1 م يساوي 360 ف استنتج من الخط البياني سعر المتر الواحد وطول قطعة سعرها 900 ف

109) المطلوب رسم الخطوط البيانية بالنسبة لمنتظم احداثيـات واحد لتغييـرات ثقل قطعة حديد وقطعة نحاس متحدتان في الحجم اذا علمت ان

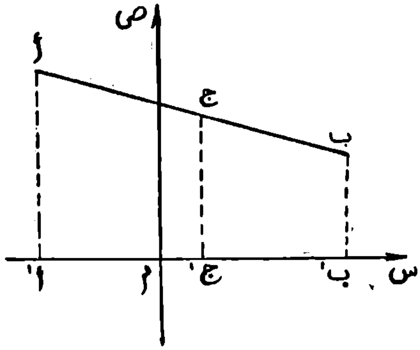
الثقل النوعي للحديد هو 8 ، 7

والثقل النوعي للنحاس هو 8 ، 8

استنتج من الرسم البياني ثقل 1،5 دم 3 ثم حجمي الحـديد والنحـاس اذا كان ثقلهما 10 كغ . ثم الفرق بين ثقلي الحديد والنحاس اذا كان حجمها 75 ، 1 دم^3

الفصل الرابع —— تطبيقات

128) منتصف القطعة أب الواصلة بين أ (س 1 ، ص 1) ب (س 2 ، ص 2)



(ش 16)

عملا بنتيجة معروفة فان فصل (ج) منتصف أ ب يساوي :

$$\text{م ج}' = \frac{1}{2}\left(\overline{\text{م أ}'} + \overline{\text{م ب}'}\right)$$

$$\boxed{\text{س} = \frac{1}{2}\left(\text{س}_1 + \text{س}_2\right)}$$

كذلك ترتيب منتصف (ج) يساوي

$$\boxed{\text{ص} = \frac{1}{2}\left(\text{ص}_1 + \text{ص}_2\right)}$$

مثال : أ (— 3 ، + 5) ب (+ 7 ، + 2)

$$\text{ج} \begin{cases} \text{س} = \frac{1}{2}\left(-3 + 7\right) = 2 \\ \text{ص} = \frac{1}{2}\left(+5 + 2\right) = \frac{7}{2} \end{cases}$$

129) معادلة مستقيم معلوم : ما هي معادلة مستقيم يمر من النقطتين

ك (— 1 ، + 5) و ج (+ 3 ، — 2)

معادلة المستقيم هي من النوع

ص = أ س + ب

تتعين المعادلة بمعرفة العددين أ ، ب

المستقيم يمر من النقطة ك حينئذ

$5 = -أ + ب$ (1)

المستقيم يمر من النقطة ج حينئذ

$-2 = 3أ + ب$ (2)

$ب = 5 + أ$

نعوض ب بقيمتها في (2)

$-2 = 3أ + 5 + أ$ $\qquad$ $4أ = 7$

$$\begin{cases} أ = \frac{7}{4} \\ ب = \frac{27}{4} \end{cases} \qquad ب = 5 + \frac{7}{4}$$

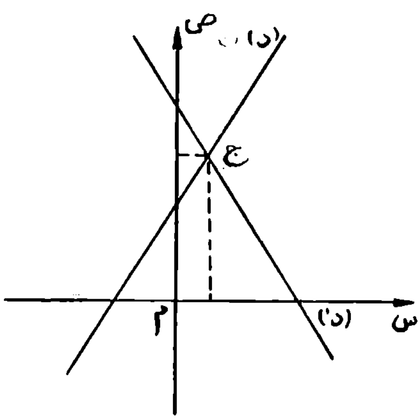
معادلة المستقيم هي : $ص = \frac{7}{4} س + \frac{27}{4}$

او $\quad 4 ص - 7 س - 27 = صفر$

130) تقـاطع مستقيمين (د) و(د')

(د) و(د') هما المستقيمان الممثلان للتابعين :

$$\begin{cases} ص = أ س + ب \\ ص = أ' س + ب' \end{cases}$$



(ش 17)

نفرض انهما يتقاطعان في (ج)

(ج) كائنة على (د) فاحداثياها

(س ، ص) يحققان الرابطة

$ص = أ س + ب$

(ج) كائنة على (د) فاحداثياها يحققان الرابطة

$ص = أ' س + ب'$

حينئذ (س) و (ص) هما جذرا السلسلة المتركبة من معادلتي المستقيمين

المنـاقشة: 1) اذا كان للسلسلة حل واحد فالمستقيمـان يتقاطعـان في نقطة واحدة

2) اذا كان حل السلسلة مستحيلا فالمستقيمان متوازيان

3) اذا كانت السلسلـة غـير معينة فالمستقيمان همـا منطبقـان

131) تطبيـق: الحل الهندسي لسلسلتين من الدرجة الاولى ذات مجهولين

نرسم المستقيمين الممثلين للمعادلتين ونقيس احـداثيي النقطة المشتركة اذا وجدت فنتحصل على الحل الهندسي للسلسلة

تمـــــارين

ارسم على منتظم واحد المستقيمين الآتين وعين نقط التقاطع مع المحورين ثم استنتج خصائص المستقيمين

110) ص = س + 3　　　ص = — س + 3

111) ص = 2 س — 1　　　ص = 2 س + 1

112) ص = 3 س + 2　　　ص = 3 س — 2

113) ص = 4 — س　　　ص = 4 + س

114) ص = $\frac{1}{2}$ س — 3　　　ص = — $\frac{1}{2}$ س + 3

115) 2 س — ص = 4　　　2 س + ص = 4

116) 3 س — 2 ص = 6　　　3 س + 2 ص = 6

117) س — ص — 5 = 0　　　س — ص + 5 = 0

118) ما هو ميلان المستقيم الجامع بين النقطتين :

أ (1 ، 2)　　　ب (3 — ، 3 — 1)

119) نفس السؤال بالنسبة للنقطتين

أ (1 ، 1)　　　ب (2 ، 5)

120) ما هي معادلة مستقيم ميلانه يساوي (+ 2) ويمر من النقطة أ (0 ، 2)

121) نفس السؤال : الميلان هو (— 2) والنقطة هي أ (0 , 1)

ما هي معادلة المستقيم المار من النقطتين :

122) أ (0 ، 2)　　　ب (3 ، 0)

123) أ (1 ، 1)　　　ب (3 ، 2)

124) أ (— 1 ، — 3)　　　ب (1 ، 2)

حل بواسطة الرسم المعادلات الآتية

125) 2 س — 3 = 0　　　5 س — 15 = 0

126) 2 س + 9 = 0　　　س + 5 = 0

127) 25 س — 45 = 0   42 س + 63 = 0

حل بواسطة الرسم السلسلات الآتية

128) { 2 س — 3 ص = — 1 ، س + 2 ص = 10 }   { س — 3 ص = 1 ، 2 س + ص = 9 }

129) { 4 س — 2 ص = 5 ، 2 س — ص = 1 }   { 6 س — 9 ص = 15 ، 4 س — 6 ص = 10 }

130) { 8 س — 3 ص = 1 ، 6 س + 2 ص = 5 }   { 7 س — 5 ص = — 4 ، 3 س + 2 ص = — 10 }

131) { 3 س — 5 ص = — 1 ، س + 3 ص = 9 }   { 5 س — 3 ص = 1 ، 3 س + ص = 9 }

الكتابُ الثالث

الهندسة

الباب الأول

الفصل الأول — اصطلاحات رياضية

132) التعـريف : التعريف هو جملة تصف عنصرا أو شكلا رياضيا وتحدد معناه

مثلا : تعريف مثلث او تعريف معادلة

133) البديهيـة : البديهية هي جملة يقبل العقل معناها من غير ان يحتاج الى دليل

مثال : نصفا كميتين متساويتين متساويان
كميتان مساويتان لثالثة متساويتان

134) النظريـة : النظرية هي جملة تلخص خـاصية شكل او مقـدار ولا يقبلها العقل الا بعد اقامة برهان عليها.

135) الموضوعة : الموضوعة هي نظرية تقبل من غير دليل

مثال : موضوعة اقليدس : من نقطة خارجة عن مستقيم لا يمكن الا انشاء مستقيم واحد مواز له

136) نظرية العكس : لنقارن بين النظريتين الخاصتين بالمثلث المتساوي "الساقين"

1) اذا كان لمثلث ضلعان متساويين فالزاويتان المقابلتان لهما متساويتان

2) اذا كان لمثلث زاويتان متساويتان فالضلعان المقابلان لهما متساويان

في النظرية الثانية الفرض هو استنتاج النظرية الاولى والاستنتاج هو فرض النظرية الاولى ـ فنقول ان النظرية الثانية هي نظرية العكـس بالنسبة للاولى

137) ملاحظة اولى : ليس لكل نظرية نظرية عكس صحيحة

مثال نظرية: المنصفات الداخلية لمثلث تلتقي في نقطة واحدة

نظرية العكس : اذا تقـاطعت ثلاث مستقيمات منبعثة من رؤوس المثلث في نقطة واحدة فهي منصفات زواياه

لفظيا هذه النظرية العكسية صحيحة ولكنها هندسيا غير صحيحة

138) ملاحظة ثانية : اذا اشتمل فرض نظرية على عدة خصائص فانه توجد عدة نظريات عكس لها .

139) الشرط الواجب والكافي : في السنة السابقة اقمنا الدليل على ان :

1") جميع نقط العمود الموسط (او المحور) لقطعة هي متساوية البعد عن نهايتي القطعة (النظرية المباشرة)

2") اذا كانت نقطة متساوية البعد عن نهايتي قطعة فهي كائنة على العمود الموسط لتلك القطعة (نظرية العكس)

النظرية المباشرة و نظرية العكس لها تلخصان في نظرية تسمى بنظـــرية الشرط الواجب والكافي

مثال : الشرط الواجب والكافي لتكون نقطة على محـور قطعة هو ان تكون متساوية البعد عن نهايتيها .

140) ملاحظة هامة : لاقـامة الدليل على نظريات الشرط الواجب والكافي يجب إقامة الدليل على نظريتين : النظرية المباشرة و نظرية العكس .

الفصل الثاني —— المحلات الهندسية

141) تعريف : المحل الهندسي هو مجموعة نقط لها خاصية معينة وتكون شكلا هندسيا

مثال 1 : الدائرة هي المحل الهندسي لجميع نقط مستو متساوية البعد عن نقطة ثابتة تسمى المركز

مثال 2 : العمود الموسط للقطعة أ ب هو المحل الهندسي لجميع النقط المتساوية البعد عن نهايتيها (أ) و (ب)

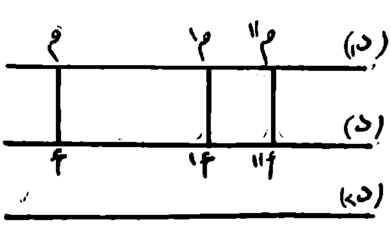
142) طريقة التفتيش عن المحل الهندسي لنقطة

التفتيش عن محل هندسي يشتمل على قسمين :

اولا : نفرض ان النقطة لها الخصائص المفروضة ثم ندرس موقعها بالنسبة الى عناصر الشكل الثابتة ـ فنستنتج من هذه الدراسة المنحني الذي تتحرك عليه النقطة

ثانيا : نثبت ان كل نقطة من المنحني السابق لها الخصائص المفروضة ، في بعض الاحيان تؤدي بنا النظرية العكسية الى تحديد القطعة من المنحني التي هي المحل الهندسي .

143) مثال اول: ما هو المحل الهندسي لجميع النقط الكائنة على بعد معلوم من مستقيم معلوم



(ش 18)

1°) نفرض ان (م) هي نقطة بعدها عن (د) يساوي ل (طول معلوم)
م أ = ل
اذا اخذنا نقطة اخرى (م') بعدها عن (د) يساوي (ل) تحصلنا على مستطيل م أ أ' م' ضلعه م م' مواز لـ (د)
وبهذا تحصلنا على مستقيم (د') ثابت تتحرك عليه النقطة م

2") وبالعكس كل نقطة م" من (د1) بعدها عن (د) هو م" أ" - وحيث ان
الرباعي م أ أ" م" هو مستطيل فان م"أ" = ل
حينئذ كل نقطة من المستقيم (د1) هي من المحل الهندسي
كذلك نثبت ان كل نقطة من (د2) هي ايضا من المحل الهندسي
وتلخص هاتان النتيجتان في النظرية الآتية :

144) نظريـة : المحل الهندسي لجميع النقط الكائنة على بعد معلوم (ل) من مستقيـم (د) هو مركب من مستقيمين موازيين لـ (د) وكائنيـن على البعد (ل) منه

145) مثال ثان: ما هو المحل الهندسي لرأس زاويـة معلومـة ضلعاها يمران من نقطتين ثابتتين

القسـم الاول

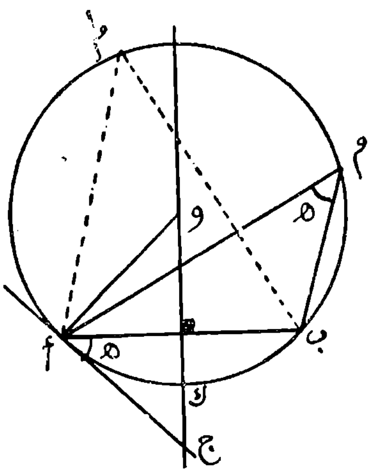
الفرض : (أ)و(ب) نقطتان ثابتتان

$\widehat{\text{أمب}}$ = هـ

النقطة م متحركة

التفتيش : الدائرة المحيطة بالمثلث مأب لها مركز (و) ثابت لان:

1") (و) واقع على العمود الموسط لـ (أب) وهي قطعة ثابتـة



(ش 19)

2") (و) على الشعاع و أ العمودي على المماس (أج) وهو ثابت لانه يكون مع (أب) زاوية مساوية لـ (هـ)
حينئذ (م) كائنة على الدائرة (و) القارة

القسم الثاني : اذا اخذنا (م') على القوس $\overset{\frown}{\text{بمأ}}$ وجدنا ان :

$\widehat{\text{أم'ب}}$ = هـ

فالقوس بمأ صالح لان يكون محلا هندسيا لـ (م)

واذا اخذنا (م") على القوس أكب وجدنا ان م" لا تساوي (هـ) فالقوس أكب غير صالح ـ يلخص هذا البحث في النظرية الآتية :

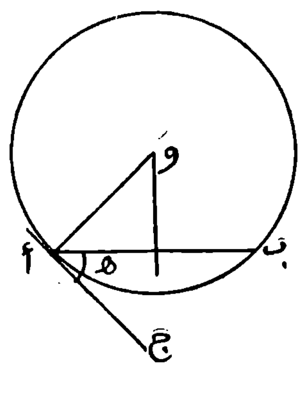
146) نظرية : المحل الهندسي لرأس زاوية قياسها ثابت وضلعاها يمران من نقطتين ثابتتين هو قوس محدود بهاتين النقطتين ويسمى القوس المقتدر

147) تعبير آخر عن النظرية السابقة : المحل الهندسي لنقط ترى منها قطعة مستقيم تحت زاوية معلومة هو قوس محدود بنهايتي القطعة

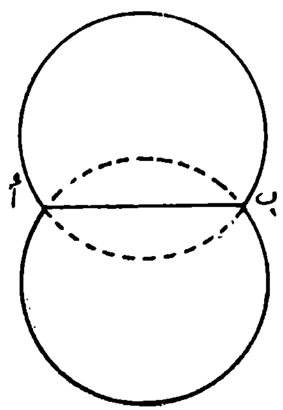
148) بناء القوس المقتدر : وهو يرجع الى بناء مركز الدائرة (و)

1") نبني العمود الموسط لـ (أب) ـ (ش 20)

2") نبني الزاوية جأب = هـ ثم العمود (وأ) على (أج)



(ش 20)

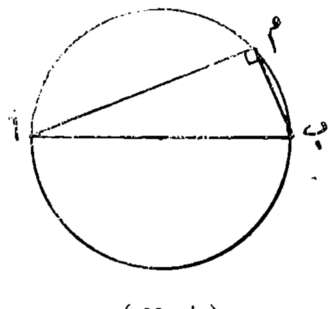


(ش 21)

149) ملاحظة :

1) يتركب المحل الهندسي المطلوب من قوسين متقابلين بالنسبة لـ (أب) (ش21)

2) اذا كانت الزاوية تساوي قائمة هـ = 90° فالمحل الهندسي يتركب من دائرة قطرها أب (ش 22)

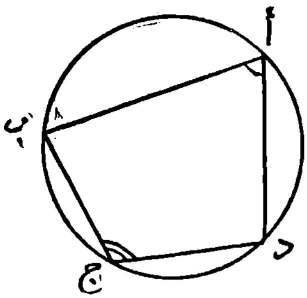


(ش 22)

الشكل الرباعي المرسوم في دائرة

150) نظريـة : اذا كان رباعي مرسوما في دائرة فان زاويتيه المتقابلتين متكاملتـان

اذا كان (أب جـ د) مرسومـا في دائـرة (ش 23) فان :



(ش 23)

$$\hat{\text{أ}} = \frac{\overset{\frown}{\text{ب ج د}}}{2}$$

$$\hat{\text{ج}} = \frac{\overset{\frown}{\text{د أ ب}}}{2}$$

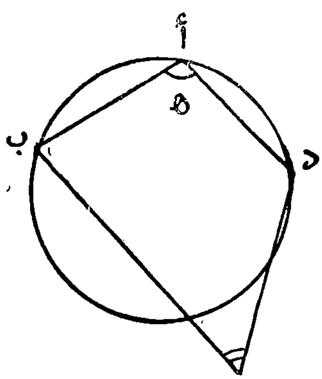
حينئذ : $\hat{\text{أ}} + \hat{\text{ج}} = \dfrac{\overset{\frown}{\text{ب ج د}} + \overset{\frown}{\text{ب أ د}}}{2}$

$$\boxed{\hat{\text{أ}} + \hat{\text{ج}} = 180^\circ}$$

151) نظرية العكس : اذا كان لرباعي زاويتان متقابلتان متكاملتـان فهو مرسوم في دائرة

نفرض أن $\hat{\text{أ}} + \hat{\text{ج}} = 180^\circ$

حينئذ $\hat{\text{ج}} = 180 - \text{هـ}$



(ش 24)

القوس $\overset{\frown}{\text{ب أ د}}$ هو المحل الهندسي لراس الزاويـة $\hat{\text{أ}} = \text{هـ}$

والقوس الباقي من الدائرة هو المحل الهندسي لراس الزاوية قيسها يساوي (180° ـ هـ) ـ حينئذ

(ج) هي نقطة من القوس $\overset{\frown}{ب د}$ والنقط الاربعة أ ب ج د مرسومة على دائرة واحدة .

تلخص النظرية المباشرة ونظرية العكس في نظرية واحدة

152) نظرية : الشرط الواجب والكافي ليكون رباعي مرسوما في دائرة هو ان يكون له زاويتان متقابلتان متكاملتان

تمــــارين

131) تمر دائرة شعاعها معلوم (ش) من نقطة ثابتة (أ) ـ ما هو المحل الهندسي لمركزها (و) ؟

ما هو المحل الهندسي للنقطة (ب) المقابلة لـ (أ) بالنسبة للمركز ؟

132) ما هو المحل الهندسي لمراكز الدائرات المارة من نقطتين ثابتين (أ) و(ب) ؟

ما هو المحل الهندسي للنقطة (أ′) المقابلة لـ (أ) بالنسبة لمراكز تلك الدائرات ؟

133) هب متوازي الاضلاع أ ب ج د اطوال اضلاعه معلومة وضلعه أ ب ثابت ما هو المحل الهندسي لرأسيه (ب) و (ج) ؟ ـ ما هو المحل الهندسي لمنتصف الضلع ج د ؟ ما هو المحل الهندسي لمركزه (و) ؟

134) هب مستقيمين متوازيين (د) و (ل) ـ ما هو المحل الهندسي لمنتصف القطع المحصورة بينهما ؟

135) قطعة مستقيم أ ب طولها ثابت (ل) ونهايتاها تتحركان على مستقيمين متعامدين (س′ وس) و (ص′ وص) ما هو المحل الهندسي لمنتصف القطعة أ ب ؟

136) هب دائرة (و) ونقطة ثانية (م) خارجية بالنسبة لها ـ المستقيمات المارة من (م) تقطع الدائرة في (أ) و (ب) ـ ما هو المحل الهندسي لـ (ج) منتصف أ ب

137) ما هو المحل الهندسي لمنتصف اوتار دائرة اذا علمت ان طول الاوتار يساوي قياسا قارا .

138) هب مستقيما ثابتا (د) ونقطة ثابتة (أ) ـ ثم نقطة (م) تتحول على (د)

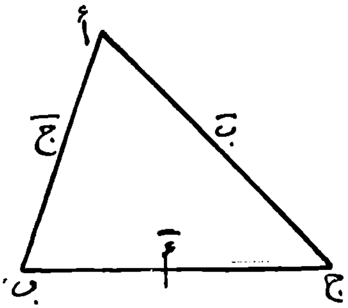
1″) ما هو المحل الهندسي لمنتصف أ م :

2″) ما هو المحل الهندسي للنقطة (أ′) المقابلة لـ (أ) بالنسبة لـ (م)؟

الفصل الثالث — البناءات الهندسية

153) **اصطلاحات** : فيما يلي تستعمل الاصطلاحات الآتية الخاصة بعناصر المثلث

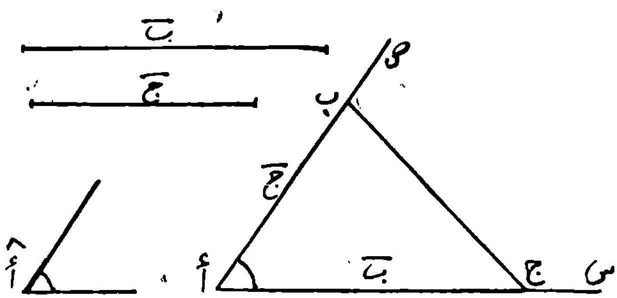
الزوايا :	$\hat{ا}$	$\hat{ب}$	$\hat{ج}$
الاضلاع :	$\overline{أ}$	$\overline{ب}$	$\overline{ج}$
الموسطات :	مأ	مب	مج
الارتفاعات :	عأ	عب	عج
المنصفات الداخلية :	نأ	نب	نج
المنصفات الخارجية :	ن'أ	ن'ب	ن'ج



(ش 25)

بناء المثلثات : تذكير

154) بناء مثلث معلوم منه ضلعان والزاوية المحصورة بينهما



(ش 26)

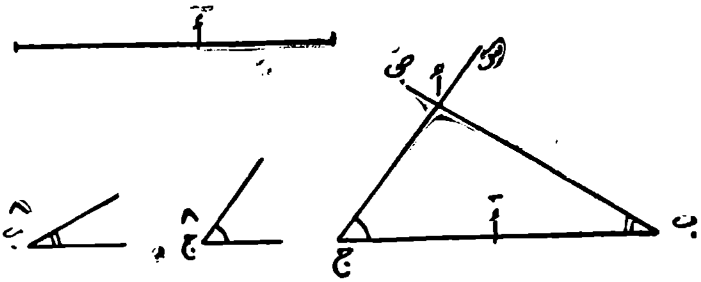
الفرض : العناصر المعلومات $\hat{أ}$ ؛ $\overline{ب}$ ؛ $\overline{ج}$

البناء : نبني زاوية $\widehat{\text{س أ ص}}$ مساوية للزاوية المعلومة ثم نأخذ على ضلعيها

أج = $\overline{ب}$ أب = $\overline{ج}$

أبج هو المثلث المطلوب

155) بناء مثلث معلوم منه : زاويتان والضلع المحصور بينهما



(ش 27)

الفرض : $\hat{ب}$ ؛ $\hat{ج}$ ؛ $\overline{أ}$ معلومة

البنـاء : نبني قطعة ب ج = $\overline{أ}$ ثم من (ب) نبني زاوية مساوية لـ ($\hat{ب}$) ومن (ج) زاويـة مساويـة لـ ($\hat{ج}$)

$\widehat{جبس}$ = $\hat{ب}$ $\widehat{بجص}$ = $\hat{ج}$

ب س، ج ص يتقاطعان في (أ) أ ب ج هو المثلث المطلوب

المنـاقشة :

1") $\hat{ب}$ + $\hat{ج}$ < 2 قـا البناء ممكن. حل واحد

2") $\hat{ب}$ + $\hat{ج}$ = 2 قـا ب س//ج ص بناء غير ممكن

3") $\hat{ب}$ + $\hat{ج}$ > 2 قـا بناء غير ممكن

156) بنـاء مثلث معلوم منه اضلاعه الثلاثة

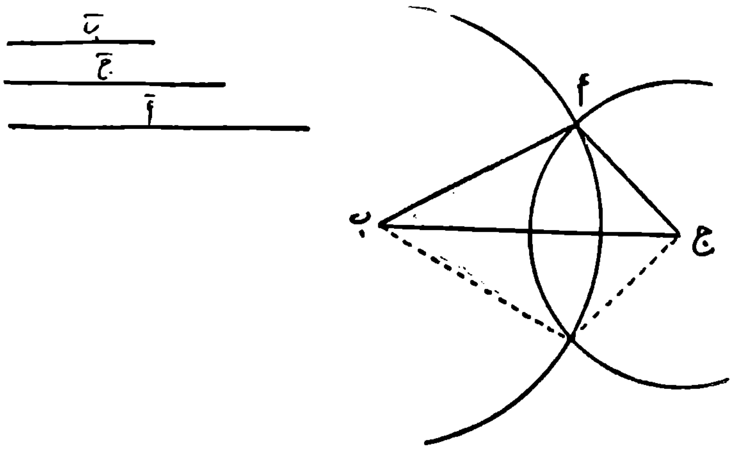
البنـاء : نبني قطعة مساوية لـ (أ) ب ج = $\overline{أ}$

الرأس أ مجهول ـ المحل الهندسي لـ (أ) هو :

ـــ دائرة مركـزها (ب) وشعاعها $\overline{ج}$

ـــ دائرة مركـزها (ج) وشعاعها $\overline{ب}$

(أ) هي حينئذ النقطة المشتركة بين الدائرتين



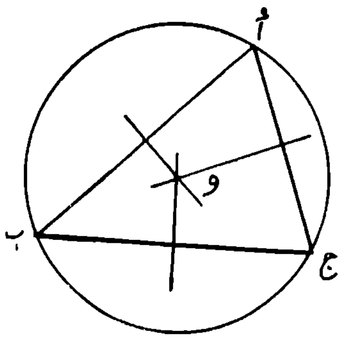
(ش 28)

المناقشة : ج -- ب < أ < ج + ب

هناك حلان (أ ب ج) و (أ' ب ج)

بناء الدوائر

157) بناء الدائرة المحيطة بمثلث



(ش 29)

تتعين الدائرة المارة من رؤوس المثلث

أ ب ج برسم مركزها وهو

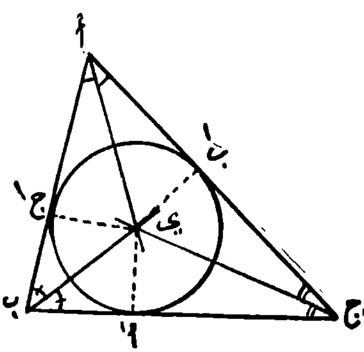
1") واقع على محور ب ج

2") واقع على محور أ ب

فالمركز هو حينئذ نقطة تقاطع

محاور المثلث

158) بناء الدائرة المرسومة في مثلث



الدائرة المرسومة في مثلث أ ب ج

هي دائرة مماسة لاضلاعه الثلاثة

تتعين هذه الدائرة برسم مركزها

وهو نقطة متساوية البعد عن اضلاع

المثلث اي نقطة تقاطع المنصفات

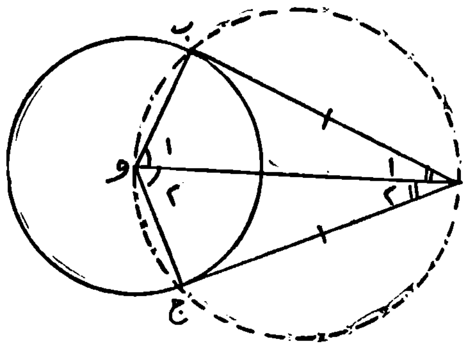
الداخلية كما حققناه في السنة السابقة

(ش 30)

الباب الرابع — بناء المماسات

156) رسم مستقيم يمر من نقطة معلومة ويكون مماسا لدائرة معلومة (ش 31)

الفرض : (و) دائرة معلومة شعاعها (ش)
(أ) نقطة معلـومة

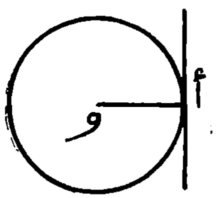


بناء المماس يرجع الى تعيين موقع نقطـة التماس (ب) حيث ان وب ⊥ أب فان (ب) كائنـة على دائـرة قطرها وأ

البناء : الدائـرة التي قطرهـا وأ تقطـع الدائرة المعلومة (و)

(ش 31)

في نقطتين (ب) و (ج) - (أب) و(أج) هما مماستان خارجيان من (أ)



(ش32)

المنـاقشة :
أو > ش ممـاسان أب،أج
أو = ش مماس واحد
أو > ش البنـاء مستحيـل

160) خاصيات المماس لدائرة :

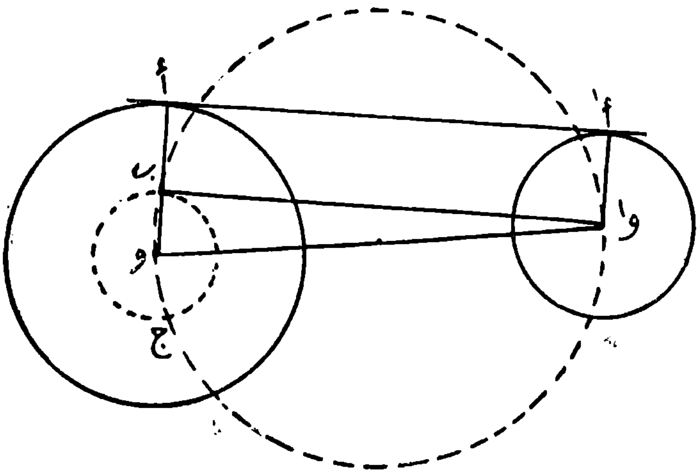
نظرية اذا رسمنا من نقطة خارجية (أ) مماسين

1") قطعتـي المماسين أب ، أج متساويتان
2") القطـر المـار من (أ) هو منصف زاوية المماسين
3") القطـر المـار من (أ) هو منصف الزاوية المتكـونة من الشعاعـين الواصلين الى نقطتي التماس (ش 31)

المثلثان أبو ، أج والقائمان لهما وتر مشترك وضلع متساوٍ: وب = وج
فهما متساويان ـــ حينئذ :

أب = أج
∧ ∧
أ 1 = أ2
∧ ∧
و 1 = و 2

161) بناء المماسات المشتركة الخارجية لدائرتين (ش 33)



(ش 33)

البحث عن البناء : نريد رسم مستقيم مماس للدائرتين (و) و (و')
وخارجا عنهما ـ إذا اعتبرنا ان البناء ممكن ورسمنا المماس المشترك أ أ'
لاحظنا ان المماس المشترك (أ أ') هو عمودي على الشعاع و أ وعلى
الشعاع و' أ' ـ ثم إذا رسمنا من (و') موازيا لـ (أ أ') تحصلنا على مستطيل
أ ب و' أ' ـ حينئذ

أ ب = و' أ' = ش'

و ب = و أ ـــ أ ب = ش ـــ ش'

وحيث ان $\widehat{و ب و'} = 90°$ فالمستقيم و' ب هو مماس لدائرة مركـزها (و)
وشعاعها (ش ــ ش') إذا عرفنا موقع النقطة (ب) تحصلنا على النقطة (أ)
بتمديد (وب) وعلى النقطة (أ') برسم و' أ' // وب

البنـاء: نرسم دائرة مركـزها (و) وشعـاعها (ش ــ ش') ثم من (و')
نرسم المماس و'ب لها ـ معرفـة (ب) تؤدي الى بنـاء المماس أ أ'

المناقشة :

1") إذا كان (و') خـارجا عن الدائرة $\left(\text{و ؛ (ش ــ ش')}\right)$

أي و' و > (ش ــ ش')

فانه يمكن رسم مماسين و' ب ، و' ج

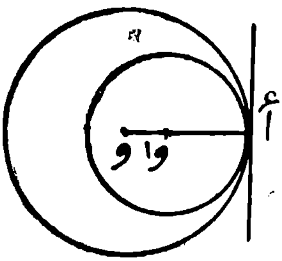
حينئذ نتحصـل على مماسين مشتـركـين
للدائرتين المعلومتين

2") اذا كان و'و = ش' (ش 34)

نتحصل على مماس واحد

3") اذا كان و' و < ش ــ ش'

فالبناء مستحيل



(ش 34)

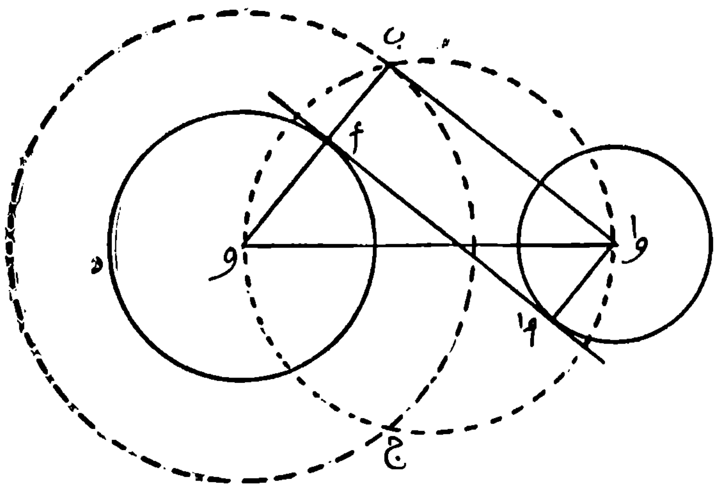
162) ملاحظـة هـامة :

1") الشـرط وو' > ش ــ ش' يـدل عـلى ان الـدائرتـين (و) و (و')
خارجيتان او متماستان خارجيا او متقاطعتان

2") الشرط وو' = ش ــ ش' يدل على ان الـدائرتين متماستـان داخليـا

3") الشرط و وا < ش ــ ش' يدل على ان الدائرتين داخليتان

163) بناء المماسات المشتركة الداخلية لدائرتين



(ش 35)

البحث عن البناء : اذا فرضنا ان البناء ممكن ورسمنا من (و') موازيا للمماس المشترك الداخلي أ أ' فانه يقطع امتداد و أ في (ب) فالشكل أ أ' و' ب مستطيل . حينئذ

أ ب = ش'

و ب = ش + ش'

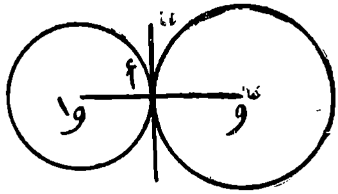
و' ب هو مماس للدائرة [و ؛ (ش + ش')]

والمشكلة ترجع الى بناء مماس لدائرة من نقطة معلومة (و')

البناء : نبني دائرة مركزها (و) وشعاعها (ش + ش') ثم من و' نرسم مماسا لها (و' ب)

أ ب يقطع الدائرة المعلومة (و) في (أ) — ومن (و') نرسم الموازي (وب) فيقطع (و') في (أ') — والمماس المطلوب هو أأ'

المناقشة :
- اذا كان و و' > ش + ش' فانه يمكن بناء مماسين (ش 35)
- اذا كان و و' = ش + ش' فانه يمكن بناء مماس واحد (ش36)
- اذا كان و و' < ش + ش' فالبناء مستحيل



(ش 36)

164) مـلاحظـة هامـة :

1") الشـرط و و' > ش + ش'
يدل على ان الدائرتين خارجيتان

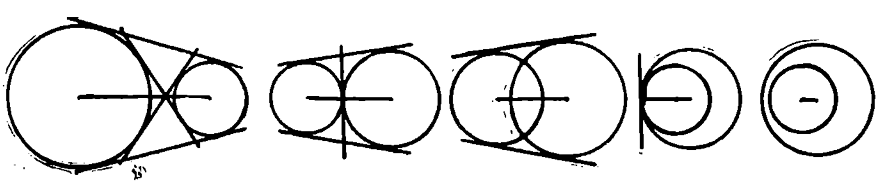
2") الشرط وو' = ش + ش' يدل
على ان الدائرتين متماستان خارجيا

3") الشرط و و' < ش + ش' يدل على ان الدائرتين متقاطعان

165) عدد المماسات المشتركة لدائرتين

تلخص النتائج السابقة في الجدول الآتي :

1") دائرتان خارجيتان وو' > ش + ش'	مماسان مشتركان خارجيان مماسان مشتركان داخليان
2") دائرتان متماستان خارجيا و و' = ش + ش'	مماسان مشتركان خارجيان مماس مشترك داخلي
3") دائرتان متقاطعتان ش ـ ش' < وو' < ش + ش'	مماسان مشتركان خارجيان
4") دائرتان متماستان داخليا و و' = ش ـ ش'	مماس مشترك خارجي
5") دائرتان داخليتان	: لا مماس مشترك



(ش 37)

تمـــــــارين

139) من نقطة (أ) خارجية نرسم مماسين (أ س ، أص) لدائرة (و) ـ ومماسا ثالثا يقطع (أس) في (ب) و أص) في (ج)

1") برهن على أن محيط المثلث أ ب ج يبقى قارا مهما كان المماس الثالث

2") برهن على ان قيس الزاوية $\widehat{\text{ب و ج}}$ يبقى قارا ايضا

140) اذا كان رباعي محيطا بدائرة فان مجموع ضلعين متقابلين من اضلاعه يساوي مجموع الضلعين الآخرين ـ البرهان .

141) ادرس الشكل الحاصل عندما ترسم المنصفات الداخلية والمنصفات الخارجية لمثلث اثبت ان كل ثلاث منصفات من المنصفات الستة تتقاطع في نقطة واحدة

ما هي خاصية كل نقطة من نقط تقاطع المنصفات

142) هب قطعة مستقيم أب ـ ثم ارسم موازيين أس ، ب ص متحدين في الانتحاء

1") ما هو المحل الهندسي لمركز الدائرة المماسة للمستقيمات أب ،أس ،أص عندما يدور (أ س) حول (أ) و (ب ص) حول (ب)

2") م ،ن ،ك هي نقط التماس ـ ما هو قيس الزاوية $\widehat{\text{م ك ن}}$ (م كائنة على أس ـ ن على أب ـ ك على ب ص)

<u>بناء مثلثات</u> : ابن مثلثا اذا علمت منه :

143) الضلع $\overline{\text{أ}}$ ومجموع الضلعين الآخرين والزاوية $\widehat{\text{أ}} = 60°$

144) الضلع $\overline{\text{أ}}$ والارتفاع النازل على ($\overline{\text{أ}}$) والزاوية $\widehat{\text{أ}}$

145) الزاوية $\widehat{\text{أ}}$ والارتفاع (ع أ) وشعاع الدائرة المرسومة

146) ضلعان وزاوية وشعاع الدائرة المحيطة ـ المناقشة

147) ضلعا والزاوية المقابلة له والفرق بين الضلعين الآخرين

المثلثات القائمة : ابن مثلثا قائما اذا علمت منه :

148) الوتر والارتفاع

149) الوتر ومجموع الضلعين الآخرين (او الفرق)

150) الارتفاع عأ والموسط مأ

151) الزاوية ب ومجموع ضلعي الزاوية القائمة

بناء دوائر:

152) ابن في دائرة وترا طوله معلوم يمر من نقطة معلومة

153) ابن دائرة مماسة لدائرة معلومة في نقطة معلومة ومماسة ايضا لمستقيم معلوم

154) ابن دائرة مماسة لدائرة معلومة في نقطة معلومة مع الفرض انها تمر من نقطة معلومة

155) هب نصف دائرة قطرها أب ـ على الشعاع (و ج) نرسم و م = جج'
(ج' هو مسقط ج على أ ب)

ما هو المحل الهندسي لـ (م) عندما يدور الشعاع و ج حول المركز (و)

الباب الثاني

التشابه

الفصل الأول — التقسيم التناسبي

167) تعريف نسبة قطعتين :

نسبة قطعتين هي نسبة قياسهما بواسطة واحدة مشتركة

(ش 38)

مثال :

أ ب = 4

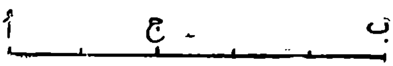
ج د = 2

$$\frac{ج د}{أ ب} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

168) تقسيم قطعة حسب نسبة معلومة — مثال عددي: ن $= \frac{2}{3}$

(أ) التقسيم الداخلي : الغاية هي البحث عن نقطة (ج) بين أ، ب بحيث

تكون : $\frac{ج أ}{ج ب} = \frac{2}{3}$



(ش 39)

ومعنى ذلك انه يوجد قطعة مكررة مرتين في (ج أ) وثلاث مرات في (ج ب) اي خمس مرات فى (أ ب) لان أ ب = ج أ + ج ب

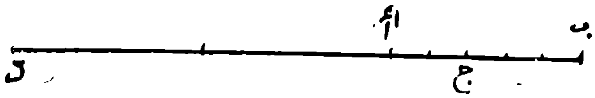
البناء: نقسم أب الى خمس قطع متساوية و نضع النقطة ج في المكان المناسب (ش 39)

في هذا المثال وجدنا النقطة ج بين (أ) و (ب) لذلك نسمي التقسيم تقسيما داخليا

طول القطعتين هو

جأ $= \frac{2}{5}$ أ ب   جب $= \frac{3}{5}$

ب) <u>التقسيم الخارجي</u> : هل توجد نقطة (د) من المستقيم أ ب خارج القطعة وتقسمها حسب نفس النسبة $\left(\frac{2}{3}\right)$ ؟



(ش 40)

لو وُجدت النقطة (د) لكان لنا

د أ / د ب $= \frac{2}{3}$

ومعني ذلك انه يوجد قطعة مكررة مرتين في (د أ) وثلاث مرات في (دب) اي مرة واحدة في (أ ب) لان

دب — دأ = أ ب

<u>البناء</u> : نمدد أ ب بقطعتين مساويتين لـ (أ ب) فنتحصل على النقطة (د) (ش 40) ونقول ان (د) تقسم أب <u>تقسيما خارجيا</u>

طول القطعتين هو

د أ = 2 أ ب   دب = 3 أ ب

169) <u>نظرية</u> : اذا اعتبرنا قطعة أب وعددا (ن) فانه يوجد على أب نقطتان (ج) و (د) تقسمان القطعة حسب النسبة ن ؛ الاولى تقسيما داخليا والثانية تقسيما خارجيا ولا توجد نقط اخرى غيرهما .

170) <u>الحالة العامة</u> : نسبة القسمة هي $\frac{ن}{ع}$

1") التقسيم الداخلي : $\frac{\text{ج أ}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{ن}}{\text{ع}}$

نقسم أ ب الى (ن + ع) قطعة متساوية (انظر الى الفصل الثامن من كتاب القسم الثالث) كل واحدة تساوي $\frac{\text{أ ب}}{\text{ن} + \text{ع}}$

فنحصل على :

$$\text{ج أ} = \frac{\text{ن} \times \text{أ ب}}{\text{ن} + \text{ع}} = \frac{\text{ن}}{\text{ن} + \text{ع}} \, \text{أ ب}$$

$$\text{ج ب} = \frac{\text{ع} \times \text{أ ب}}{\text{ن} + \text{ع}} = \frac{\text{ع}}{\text{ن} + \text{ع}} \, \text{أ ب}$$

2") القسم الخارجي : $\frac{\text{د أ}}{\text{د ب}} = \frac{\text{ن}}{\text{ع}}$

اذا كانت $\text{ع} > \text{ن}$ فان (د) من ناحية (أ)

واذا كانت $\text{ع} < \text{ن}$ فان (د) من ناحية (ب)

نقسم أ ب الى (ن-ع) قطعة متساوية كل وحدة تساوي $\frac{\text{أ ب}}{\text{ن} - \text{ع}}$

فنحصل على :

$$\text{د أ} = \frac{\text{ن} \times \text{أ ب}}{\text{ن} - \text{ع}} = \frac{\text{ن}}{\text{ن} - \text{ع}} \, \text{أ ب}$$

$$\text{د ب} = \frac{\text{ع} \times \text{أ ب}}{\text{ن} - \text{ع}} = \frac{\text{ع}}{\text{ن} - \text{ع}} \, \text{أ ب}$$

171) حساب القطع بواسطة التناسب :

1") التقسيم الداخلي

$\frac{\text{ج أ}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{ن}}{\text{ع}}$ نغير الوسطين فيصير التناسب

$$\frac{\text{ج أ}}{\text{ن}} = \frac{\text{ج ب}}{\text{ع}} = \frac{\text{ج أ} + \text{ج ب}}{\text{ن} + \text{ع}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ن} + \text{ع}}$$

اذا اعتبرنا النسبة الاولى والنسبة الاخيرة فلنا

$$\text{ج أ} \, (\text{ن} + \text{ع}) = \text{ن} \times \text{أ ب} \qquad \text{ج أ} = \frac{\text{ن}}{\text{ن} + \text{ع}} \, \text{أ ب}$$

واذا اعتبرنا النسبة الثـانية والنسبة الاخيرة

$$\text{جب}(\text{ن}+\text{ع}) = \text{ع} \times \text{أب} \qquad \text{جب} = \frac{\text{ع}}{\text{ن}+\text{ع}}\ \text{أب}$$

2") التقسيم الخارجي : $\frac{\text{دأ}}{\text{دب}} = \frac{\text{ن}}{\text{ع}}$

$$\frac{\text{دأ}}{\text{ن}} = \frac{\text{دب}}{\text{ع}} = \frac{\text{دأ} - \text{دب}}{\text{ن} - \text{ع}} = \frac{\text{أب}}{\text{ن} - \text{ع}}$$

$$\text{دأ} = \frac{\text{ن}}{\text{ن} - \text{ع}}\ \text{أب} \qquad \text{دب} = \frac{\text{ع}}{\text{ن} - \text{ع}}\ \text{أب}$$

تمـــــارين

156) طول قطعة أب يساوي 49 صمر ومنتصفها هو (م)

1") ابـنِ النقطتين ج،د اللتين تقسمان أ ب حسب النسبة 3/4

2") جِدْ قيس القطع أج ، ب ج ، أد ، ب د ، م ج ، م د ، ج د

2") جِدِ النسبتين $\frac{\text{ج أ}}{\text{أب}}$ ، $\frac{\text{د أ}}{\text{أب}}$

157) النقطة ج تقسم القطعة أب حسب النسبة 3/5 ـ

اذا علمت ان أج = 12 صم فما هو طول أب

حالتان : تقسيم داخلي وتقسيم خارجي

158) النقطتــانـــ ج ، د تقسمـان القطعة أب حسب النسبــة 5/3 ـ اذا علمــت

ج د = 12 صم فما هو طول القطعة أب

159) هب قطعة أب = $\overline{\text{أ}}$ ـ ارسم النقطتين ج،د اللتين تقسمانها حسب النسبة 3/7

ماهو طول القطعة أج، أد، بج، بد، جد

160) هب قطعة أب = $\overline{\text{أ}}$ ؛ ارسم القطعتين ج،د اللتين تقسمانها حسب النسبة ن

جِدْ طول القطع أج ، أد واستنتج من ذلك العلاقة

$$\frac{1}{\text{أج}} + \frac{1}{\text{أد}} = \frac{2}{\text{أب}}$$

الفصل الثاني المتوازيات والقواطع

نظرية « طالاس »

172) تمهيد : « نظرية طالاس » هي نظرية اساسية بالنسبة للدروس التالية من برنامج السنة الرابعة ولذا ينبغي :

1") اعادة النظر في الدروس الخاصة بالنسبة والمناسبة (برنامج الحساب)

2") مراجعة الفصل الثامن (ص 159) من برنامج الهندسة للسنة الثالثة الخاص بالمستقيمات المتساوية البعد بعضها عن بعض

173) نظرية طالاس :

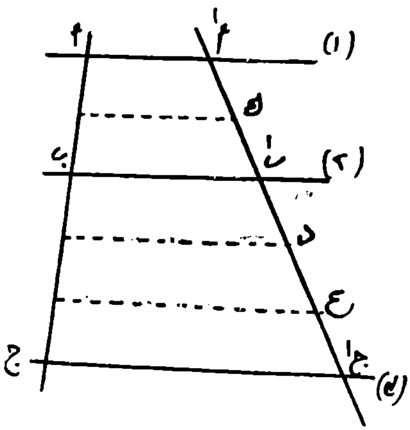
المستقيمات المتوازية تحدد على قاطعين قطعا متناسبة .

الفرض : (1) (2) (3)

مستقيمات متوازية

الاستنتاج:

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ب' ج'}} = \frac{\text{أ ج}}{\text{أ' ج'}}$$



(ش 41)

البرهان : نفرض ان أب ، ب ج لهما وحدة نقيس بها القطعتين فنجد مثلا:

أب $=$ 2 ب ج $=$ 3

$$\frac{\text{ب أ}}{\text{ب ج}} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

اذا رسمنا موازيات لـ (أأ') من النقط التي تقسم اج الى قطع متساوية كونا متوازيات متساوية البعد بعضها عن بعض وهي تحدد على القاطع الثاني قطعا متساوية :

أ′ك = كب′ = ب′د = دع = عج′

حينئذ $$\frac{\text{أ}'\text{ب}'}{\text{ب}'\text{ج}'} = \frac{2}{3} \qquad (2)$$

ومن العلاقتين (1) و(2) نستنتج: $\dfrac{\text{أب}}{\text{بج}} = \dfrac{\text{أ}'\text{ب}'}{\text{ب}'\text{ج}'}$

ويمكن ان نكتب المناسبة على الصورة الاتية :

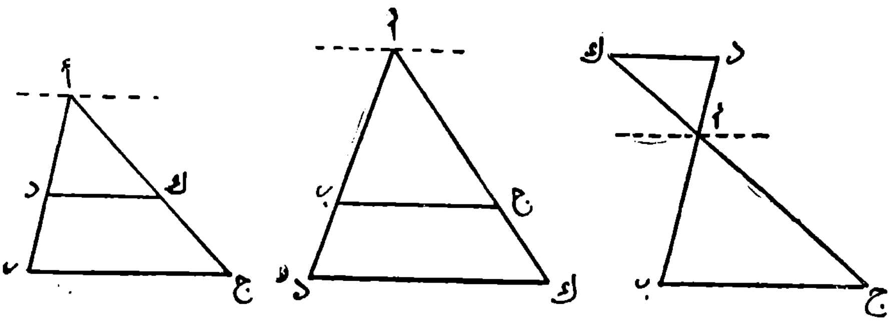
$$\boxed{\frac{\text{أ ب}}{\text{أ}'\text{ب}'} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ب}'\text{ج}'}}$$

وعملا بالنظرية المعلومة الخاصة بالنسب المتساوية نتحصل على

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ}'\text{ب}'} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ب}'\text{ج}'} = \frac{\text{أ ج}}{\text{أ}'\text{ج}'}$$

تطبيق على المثلثات

174) نظرية : كل مستقيم مواز لاحد اضلاع مثلث يحدد على الضلعين الآخرين قطعا متناسبة



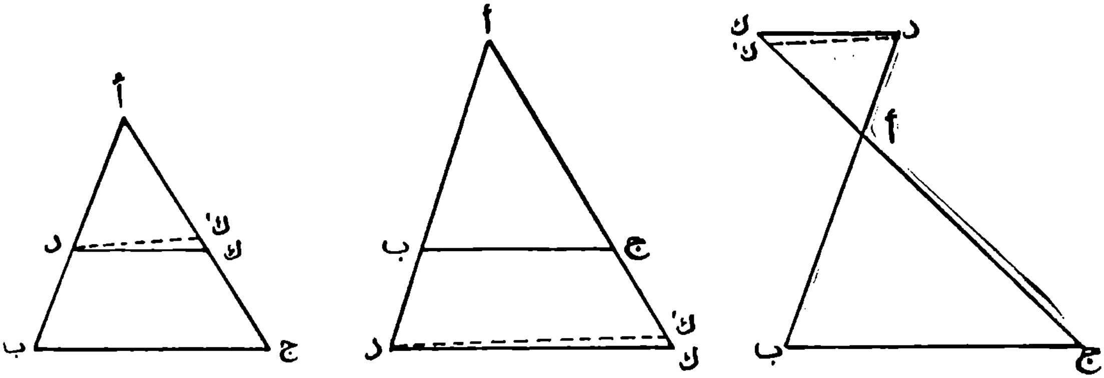
(ش 42)

الفرض : د ك // ب ج

اذا انشأنا من (أ) موازيا لـ (ب ج) وطبقنا نظرية طالاس تحصلنا على العلاقة المطلوبة — برهان صالح في الحالات الثلاث (ش 42)

$$\frac{\text{أ د}}{\text{أ ك}} = \frac{\text{د ب}}{\text{ك ج}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$$

175) <u>نظرية العكس</u>: اذا حدد مستقيم على ضلعي مثلث قطعا متناسبة وكان هذا المستقيم يقطع الضلعين او امتدادهما من جهة واحدة بالنسبة للضلع الآخر فان المستقيم القاطع مواز للضلع الثالث



(ش 43)

<u>الفرض</u> : $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\text{أك}}{\text{أج}}$ <u>الاستنتاج</u> : ك د // ب ج

من (د) نرسم دك' // ب ج ــ حسب النظرية الاصلية نحصل على .

$$\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\text{أك'}}{\text{أج}}$$

وبعد المقارنة مع علاقة الفرض نستنتج أ ك = أك'

حينئذ : ك' منطبقة على ك . دك // ب ج

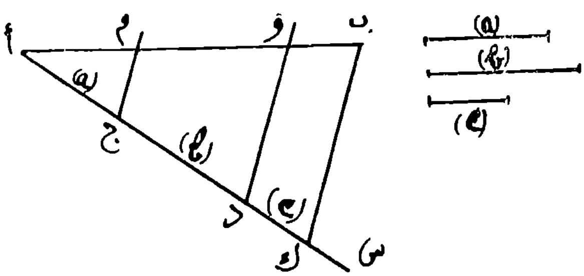
تطبيقات : بناءات هندسية

176) <u>تقسيم قطعة الى قطع متناسبة مع اطوال معلومة</u>

<u>الفرض</u> : لنا القطعة أب والاطـوال المعلـومة c.b.a

<u>الفرض</u> : تقسيم أب الى قطع متناسبة مع c.b.a

البناء : من (أ) تنشىء مستقيم أس ونضع عليه الاطوال المعلومة c.b.a

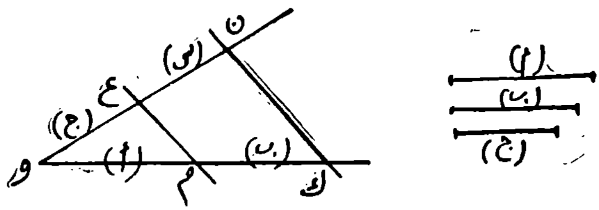


(ش 44)

ثم نصل بين (ب) والنقطة الاخيرة (ك) ونرسم الموازيات لـ (كب) من النقط (ج) و (د) فتقطع أ ب في (م) و (و) ، وحسب نظرية طالاس فان :

$$\frac{\text{م أ}}{a} = \frac{\text{م و}}{b} = \frac{\text{ب و}}{c}$$

177) بنـاء الرابع المتناسب (س) لثـلاث قطع (أ) ، (ب) ، (ج) معلـومة



(ش 45)

س هو طول يحقق

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{س}}$$

على ضلعي زاوية نرسم

و م = أ   م ك = ب

و ع = ج

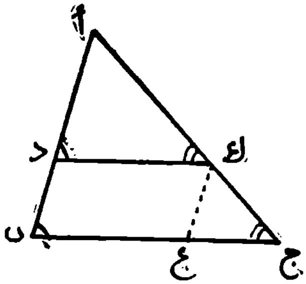
ثم نصل بين (م) و (ع) ونرسم كان // م ع فنحصل على :

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{ن ع}}$$

حينئذ   ن ع = س

الفصل الثالث — المثلثات المتشابهة

178) نظرية تمهيدية: المستقيم الموازي



(ش 46)

لاحد اضلاع مثلث يكون مع الضلعين الآخرين مثلثا اضلاعه متناسبة مع اضلاع المثلث الاول ،

الفرض : د ك // ب ج

الاستنتاج :
$$\frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ك}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{د ك}}{\text{ب ج}}$$

البرهان : حيث ان د ك // ب ج فلنا حسب نظرية طالاس

$$\frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ك}}{\text{أ ج}} \quad (1)$$

من (ك) نرسم موازيا للضلع أ ب فيقطع ب ج في (ع)

فلنا د ك = ب ع (قطعتان متوازيتان بين متوازيين)

$$\frac{\text{أ ك}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{ب ع}}{\text{ب ج}} \quad (2) \quad \text{(نظرية طالاس)}$$

اذا قارنا النتيجتين (1) و (2) وعوضنا (بع) بـ (دك) حصلنا على العلاقة المطلوبة

$$\boxed{\frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ك}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{د ك}}{\text{ب ج}}}$$

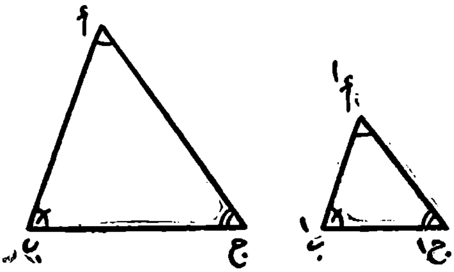
179) ملاحظة : في المثلثين أ ب ج ، أ د ك الزاوية $\widehat{\text{أ}}$ مشتركة

$\widehat{\text{ب}} = \widehat{\text{د}}$ متناظرتان $\widehat{\text{ج}} = \widehat{\text{ك}}$ متناظرتان

180) <u>تعريفات :</u> نقول ان مثلثين متشابهان اذا كان فيهما

1") الزوايا الثلاث متساوية
2") الاضلاع الثلاثة متناسبة

نسبة الضلعين المواجهين لزاويتين متساويتين تسمى <u>نسبة التشابه</u>



نسبة التشابه هي :

$$\text{ن} = \frac{\text{أ'ج'}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{أ'ب'}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ب'ج'}}{\text{ب ج}}$$

اذا كان مثلثان متشابهين تحققت علاقات بين عناصرهما

1") تساوي الزوايا

$$\widehat{\text{أ}} = \widehat{\text{أ'}} \qquad \widehat{\text{ب}} = \widehat{\text{ب'}} \qquad \widehat{\text{ج}} = \widehat{\text{ج'}}$$

2") تناسب الاضلاع

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ'ب'}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ'ج'}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ب'ج'}}$$

181) <u>ملاحظة :</u> الاضلاع المتناسبة هي الاضلاع المواجهة للزوايا المتساوية

أ) حالات تشابه المثلثات

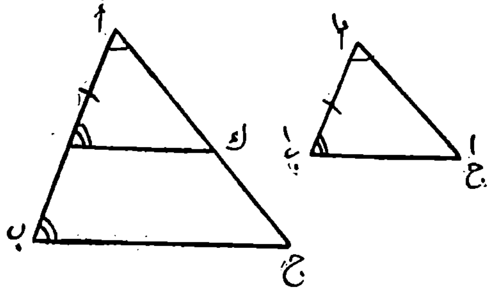
<u>تمهيد :</u> لاثبات تشابه مثلثين ليس من الواجب تحقيق الشروط الستة السابقة بل يكفي ان نحقق ثلاثة منها وهذا مما يؤدي بنا الى وضع ثلاث حالات للتشابه

182) <u>الحالة الاولى :</u> يتشابه مثلثان اذا تساوت زاويتان من الاولى مع زاويتين من الثاني

الفرض : $\hat{\text{أ}} = \hat{\text{أ}}'$ ، $\hat{\text{ب}} = \hat{\text{ب}}'$

الاستنتاج : 1) $\hat{\text{ج}} = \hat{\text{ج}}'$

2) $\frac{\text{أ' ب'}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ' ج'}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{ب' ج'}}{\text{ب ج}}$



(ش 48)

1) تساوي $\hat{\text{ج}}$ مع $\hat{\text{ج}}'$ واضح

2) على الضلع أ ب نرسم أ د = أ' ب' ثم من (د) نرسم د ك // ب ج فنحصل على مثلث أ د ك مشابه للمثلث أ ب ج حسب النظرية التمهيدية

$\frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ك}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{د ك}}{\text{ب ج}}$ $\qquad$ $\hat{\text{د}} = \hat{\text{ب}}$

المثلثان أ د ك ، أ' ب' ج' لهما ضلع مساوٍ محصور بين زاويتين متساويتين فهما متساويان ـ حينئذ أ' ب' ج' ، أ ب ج متشابهان

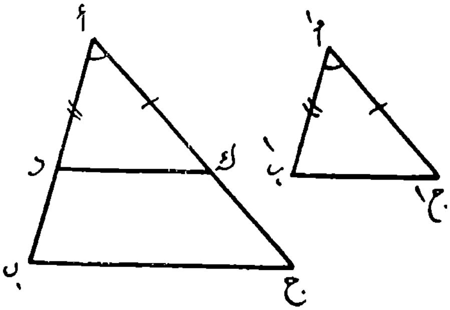
$\hat{\text{ج}} = \hat{\text{ج}}'$ $\qquad$ $\frac{\text{أ' ب'}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ' ج'}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{ب' ج'}}{\text{ب ج}}$

183) الحالة الثانية : يتشابه مثلثان اذا كان لهما زاوية متساوية محصورة بين ضلعين متناسبين

الفرض : $\hat{\text{أ}} = \hat{\text{أ}}'$ ، $\frac{\text{أ' ب'}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ' ج'}}{\text{أ ج}}$

الاستنتاج : $\hat{\text{ب}} = \hat{\text{ب}}'$ ، $\hat{\text{ج}} = \hat{\text{ج}}'$ ، $\frac{\text{أ' ب'}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ب' ج'}}{\text{ب ج}}$

(ش 49)



اذا وضعنا المثلث أ ب ج على المثلث أ ب ج بحيث تكون الزاويـة أ̂' تنطبق

على مساويتها الزاوية أ̂ احدثنا مثلثا أ د ك مساويا لـ (أ'ب'ج')

حينئذ : $\frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ك}}{\text{أ ج}}$

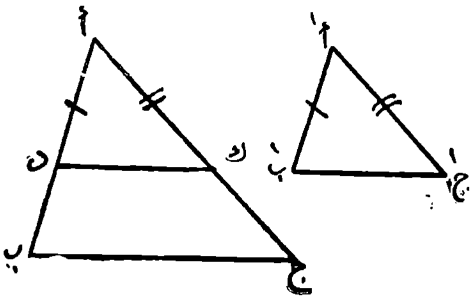
وحسب نظرية سابقة عكس نظرية طالآس فان د ك // ب ج

نستنتج من ذلك ك̂ = ج̂ = ج̂'   د̂ = ب̂ = ب̂'

فنثبت تشابه المثلثين (أ ب ج) و (أ ب ج) بالرجوع الى الحالة الاولى

184) الحالة الثالثـة : يتشابه مثلثان اذا تناسبت اضلاعهما الثالثة

(ش 50)



الفرض : $\frac{\text{أ'ب'}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ'ج'}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{ب'ج'}}{\text{ب ج}}$

الاستنتـاج : ̂، = أ̂'   ب̂ = ب̂'   ج̂ = ج̂'

البرهان : اذا رسمنا على أب القطعة أد = أ'ب' وعلى أ ج القطعة

أ ك = أ' ج' اصبح الفرض

$\frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ك}}{\text{أ ج}}$ حينئذ   دك // ب ج

وعملا بالنظرية التمهيدية فان

$\frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ا ك}}{\text{ا ج}} = \frac{\text{د ك}}{\text{ب ج}}$

بعد المقارنة مع علاقات الفرض نستنتج ان

$\frac{\text{ب' ج'}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{د ك}}{\text{ب ج}}$

حينئذ   دك = ب' ج'   والمثلث أدك مساو للمثلث أ ب ج

اذا $\hat{\text{أ}} = \hat{\text{أ'}}$

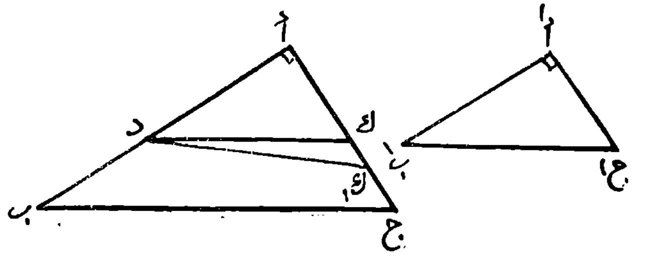
فثبت التشابه بالرجوع الى الحالة الثانية

ب) التشابـه في المثلثـات القائمة

185) مـلاحظـة : في المثلثات القائمة تصير حالات التشابه العامة

كما يلي :
1 ـ يتشابه مثلثان قائمان اذا تساوت فيهما زاوية حادة
2 ـ يتشابه مثلثان قائمان اذا تناسب اضلاع الزاويتين القائمتين

186) حالة خاصة بالمثلث القائـم : يتشابه مثلثان قائمان اذا تناسب فيهمـا الوتر وضلع قـائم



(ش 51)

الفرض : $\frac{\text{أ'ب'}}{\text{أ ب}} \quad \frac{\text{ب'ج'}}{\text{ب ج}}$

الاستنتــاج : أ'ب'ج'، أ ب ج متشابهان

البرهان : ننقل أ'ب'ج' على أ ب ج بحيث تنطبق الزاوية ($\widehat{\text{أ'}}$) على الزاوية ($\widehat{\text{أ}}$) فنحصل على المثلث أدك المساوي للمثلث أ'ب'ج'.

وتصبح علاقة الفرض

$$\frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{د ك}}{\text{ب ج}} \qquad (1)$$

اذا رسمنا من (د) موازيا لـ (ب ج) دك1 // ب ج

$$\text{يمكن ان نكتب } \frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{د ك1}}{\text{ب ج}} \qquad (2)$$

وبعد مقارنة العلاقتين (1) و (2) نرى ان : دك = دك1

فالنقطة ك 1 منطبقة حينئذ على ك دك // ب ج

والمثلثان (أدك) و (أبج) متشابهان - اي (أ'ب'ج') و (أبج)

ج) تطبيقـــات التشـابـه

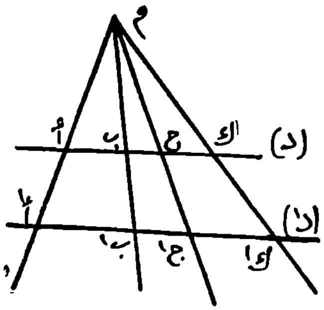
187) نظرية : المستقيمات المنبعثة من نقطة واحدة تحدد على قاطعين متـوازيين قطعا متناسبة

الفـرض : د'// د

الاستنتـاج :

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ'ب'}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ب'ج'}} = \frac{\text{ج ك}}{\text{ج'ك'}}$$

البرهان : المثلثان مأب، مأ'ب' متشابهان :



(ش 52)

$$\frac{\text{مب}}{\text{مب}} = \frac{\text{مأ}'}{\text{مأ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أ}'\text{ب}'} \qquad (1)$$

والمثلثان م ب ج ، م ب'ج' متشابهان :

$$\frac{\text{مب}}{\text{مب}'} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ب}'\text{ج}'} = \frac{\text{مج}}{\text{مج}'} \qquad (2)$$

والمثلثان م ج ك ، م ج'ك' متشابهان :

$$\frac{\text{مج}}{\text{مج}'} = \frac{\text{ج ك}}{\text{ج}'\text{ك}'} \qquad (3)$$

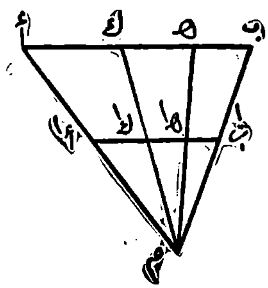
من العلاقات (1) ، (2) ، (3) نستنتج :

$$\frac{\text{أب}}{\text{أ}'\text{ب}'} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ب}'\text{ج}'} = \frac{\text{ج ك}}{\text{ج}'\text{ك}'}$$ وهو المطلوب

188) تطبيق : قسمة قطعة (أب) الى قطع متناسبة مع الاطوال س،ص،ط المعلومة

البناء : نسطر مستقيما موازيا لـ (أب)
ونرسم عليه القطع المعلومة .
المستقيمان أأ' ، بب' يتقاطعان في م :
نجمع (مك') ، (مه') فيقطعان (أب) في (ك) و (ه) :

$$\frac{\text{أ ك}}{\text{س}} = \frac{\text{هك}}{\text{ص}} = \frac{\text{ب ه}}{\text{ط}}$$



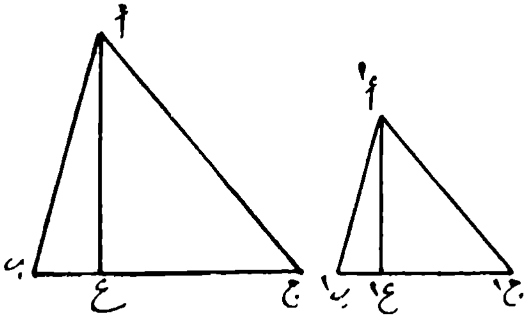
(ش 53)

189) تطبيق على المثلث : في مثلثين متشابهين نسبة ارتفاعين متواجهين (1) تساوي نسبة التشابه

الفرض : أ ب ج ، أ'ب'ج' متشابهان

الاستنتاج : $\frac{\text{أع}}{\text{أ}'\text{ع}'} = \frac{\text{أب}}{\text{أ}'\text{ب}'} = \text{ن}$

(1) تنبيه : الارتفاعان المنبعثان من رأسي زاويتين متساويتين تمتهما اصطلاحا بكلمة : متواجهان



(ش 54)

البرهــان : المثلثان القائمان

أ ع ب ، أ' ع' ب'

لهمـا زاويــة حــادة

متسـاويـة $\widehat{ب} = \widehat{ب'}$

فهما متشابهان ـــ

حينئذ:

$$\frac{أ ع}{أ' ع'} = \frac{أ ب}{أ' ب'} = ن$$

190) ملاحظة : النظريــة السابقة صحيحة بالنسبــة الى عناصر المثلث الاخرى المنصفات ، الموسطات ، اشعة الدوائـر المحيطة والدوائـر المرسومـة ...

تمـــــارين

161) هب مثلثا أ ب ج ومنصفه أ د - من (ب) نرسم موازيا لـ (أ د) يقطـع امتـداد الضلع أ ج في (و)

1") برهن ان المثلث أ ب و متساوي الساقين

2") برهن ان $\frac{د ب}{د ج} = \frac{أ ب}{أ ج}$

162) ابن مثلثا أ ب ج اذا علمت زوايـاه والفرق بين ضلعين من اضلاعـه (ابـن) مثلثا مشابها للمثلث المطلوب ثم استنتج منه المثلث أ ب ج)

163) ابن مثلثا أ ب ج اذا علمت زواياه والمسافة الفاصلة بين المركز القائم ومركـز الدائرة المحيطة به (استعمل طريقة التمرين السابق)

164) هب دائرتيـن (و) و (و') متمـاستين في (أ) ـ م ك هو قطر الدائــرة (و) ـ المستقيم (أ م) يقطع (و') في (م')والمستقيم أ ك يقطع(و') في (ك')ـ بـرهن ان م' ك' يمر من نقطة ثابتة وان طول القطعة م ك قار

165) نعتبر مستقيما (د) وجميع الـدوائر المماسة له في نقطـة معلومة (أ) ونرسم المستقيمات الموازية لاتجاه معلوم والمماسة لتلك الدوائر في م1م2، م3 برهن ان نقط التماس هذه كائنة على استقامة واحدة ـ عين موقع هذا المستقيم

166) هب دائرة (و) ونقطة خـارجية (أ) ـ نصل (أ) بنقطة م من نقط الدائرة ـ ثم نأخذ على أم نقطة ك بحيث تكون $\frac{\text{أك}}{\text{أم}} =$ ن ـ جد المحل الهنـدسي ل (ك) عندما تتحرك (م) على (و)

167) هب مثلثا أ ب ج له الزاوية $\hat{\text{ب}}$ اكبر من الزاوية $\hat{\text{ج}}$ ـ من (ب) نرسم نصف مستقيم يكـوّن مع أب زاويـة مساوية ل($\hat{\text{ج}}$) فيقطع أج في (د) ـ فتـش عن مثلثين متشابهين واستنتج من ذلك العلاقة

$$\overline{\text{أب}}^2 = \text{أج} \times \text{أد}$$

168) هب مثلثا أب ج والدائرة المبيطة به (و) ـ ارسم القطر أ أ' والاوتفـاع أع ثم برهن ان المثلثين أبأ' ، أع ج متشابهان ـ استنتج من ذلك ان

$$\text{أب} \times \text{أج} = \text{أع} \times \text{أأ'}$$

169) هب مثلثا أب ج وموسطـاته (أم ، بك) ـ نفرض ان الضلع أب ثـابت وان الراس (ج) يتحـرك على مستقـيم س س' مواز ل(أب) ـ ما هـو المحـل الهندسي للنقطتـين (م) و(ك) ـ أم ، بك يتقاطعـان في هـ ـ ما هو المحـل الهندسي ل(هـ)

170) هب مثلثا أب ج والدائرة (و) المحيطة به ـ ارسم المركز القائم (هـ) في المثلث أب ج ثم المستقيم (دك) الجامع بين منتصفيْ الضلعين ب ج ، أج ـ برهن ان المثلثين أب هـ ، دوك متشابهان وان أهـ = 2 و د

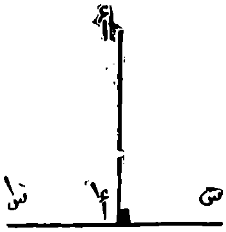
الباب الثالث

العلاقات القياسية

الفصل الأول — العلاقات القياسية في المثلث القائم

191) المَسْقط العمودّي : لنفرض مستقيما س′س ونقطة خارجية (أ) ـ العمود النازل من (أ) على (س′س) يقطعه في (أ′) ـ وتسمى (أ′) المسقط العمودي للنقطة (أ) على (س ′س)

وتكتب هكذا أ′ = أ / س ′س

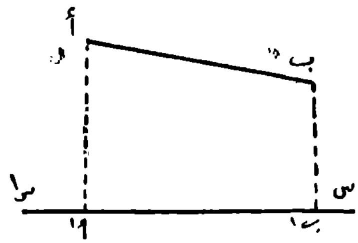


(ش 55)

192) مسقط قطعة على مستقيم :

اذا اعتبرنا قطعة (أ ب) ومستقيما س′س ثم رسمنا المسقطين العموديين لـ (أ ، ب) على س′س تحصلنا على قطعة أ′ب′ تسمى مسقط القطعة (أب) على س′س :

أ′ ب′ = أ ب / س′س

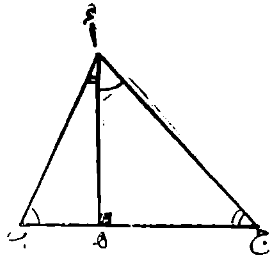


(ش 56)

العلاقة الاولى :

193) نظرية : في مثلث قائم الزاوية الضلع القائم هو المتوسط الهندسي بين الوتر ومسقطه على الوتر

الفرض : ب أ ج مثلث قائم
ب هـ = أب / ب ج
ج هـ = أج / ب ج



(ش 57)

البرهان : المثلثان القائمان أبج ، هـ ب أ لهما $\hat{\text{ب}}$ زاوية مشتركة فهما متشابهان . حينئذ

$$\frac{\text{أب}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{أج}}{\text{هـ أ}} = \frac{\text{بج}}{\text{ب أ}} \qquad (1)$$

حينئذ

$$\boxed{\overline{\text{أب}}^{2} = \text{ب ج} \times \text{ب هـ}}$$

وبنفس الطريقة تثبت ان :

$$\boxed{\overline{\text{أج}}^{2} = \text{ب ج} \times \text{ج هـ}}$$

العلاقة الثانية

194) نظرية فيثاغورس : في كل مثلث قائم يساوي مربع الوتر مجموع مربعي الضلعين القائمين

البرهان : نجمع العلاقتين السابقتين

$$\overline{\text{أب}}^{2} = \text{ب ج} \times \text{ب هـ}$$

$$\overline{\text{أج}}^{2} = \text{ب ج} \times \text{ج هـ}$$

$$\overline{\text{أب}}^{2} + \overline{\text{أج}}^{2} = \text{ب ج} \; (\text{ب هـ} + \text{ج هـ})$$

واذا رجعنا الى الشكل (ش 57) وجدنا ان :

$$\text{ب هـ} + \text{ج هـ} = \text{ب ج}$$

حينئذ

$$\boxed{\overline{\text{أب}}^{2} + \overline{\text{ج}}^{2} = \overline{\text{ب ج}}^{2}}$$

العلاقـة الثالثـة

195) نظريـة : في كل مثلث قائم يساوي سطح الضلعين القائمين سطح الـوتر في الارتفاع النازل عليه

من العلاقة (1) السابقة (بند 193) نستنتج ان : $\frac{\text{أ ج}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ب}}$

أي $$\boxed{\text{أ ج} \times \text{أ ب} = \text{ب ج} \times \text{أ هـ}}$$

العلاقـة الرابعـة

196) نظريـة : في كل مثلث قائم الزاوية الارتفاع النازل على الوتر هو متوسط هندسي بين القطعتين المحددتين بالارتفاع على الوتر

البرهان : نعتبر المثلثين أهب ، ج هـ أ (ش 57) ـ فهما متشابهان (لهما زاوية حادة متساوية)

$$\frac{\text{أ هـ}}{\text{ج هـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ أ}}$$

حينئذ $$\boxed{\overline{\text{أ هـ}}^2 = \text{ب هـ} \times \text{هـ ج}}$$

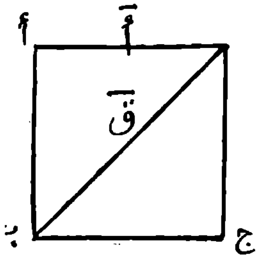
197) تطبيقات حسابية :

أ) قطر المربع : اذا علمنا ضلع المربع (أ)

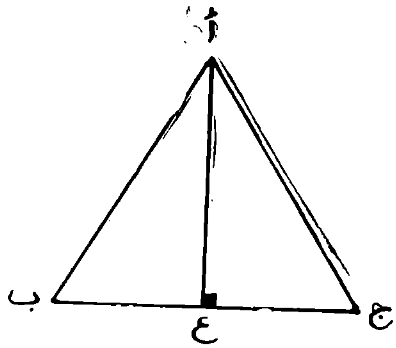
فان القطر يساوي :

$$\overline{\text{ق}}^2 = \overline{\text{أ}}^2 + \overline{\text{أ}}^2 = 2\overline{\text{أ}}^2$$

$$\boxed{\text{ق} = \text{أ} \sqrt{2}}$$



(ش 57)



(ش 59)

ب) ارتفاع المثلث المنتظم (ضلعه أ)

في المثلث أ ع ب القائم الزاوية لنا

$$\overline{\text{أب}}^2 = \overline{\text{أع}}^2 + \overline{\text{بع}}^2$$

$$\text{أ}^2 = \overline{\text{أع}}^2 + \frac{\text{أ}^2}{4}$$

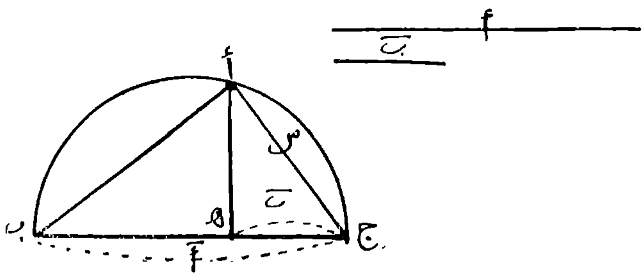
$$\overline{\text{أع}}^2 = \text{أ}^2 - \frac{\text{أ}^2}{4} = \frac{3\,\text{أ}^2}{4} \qquad \boxed{\text{أع} = \frac{\text{أ}\sqrt{3}}{2}}$$

198) **تطبيقات على البناء الهندسي** : المتوسط الهندسي: المطلوب رسم طول يكون هو المتوسط الهندسي بين طولين معلومين :

المتوسط الهندسي المطلوب هو الطول س حيث ان

$$\text{س}^2 = \text{أ} \times \text{ب}$$

أ) الطريقة الاولى : (ش 60) مستنتجة من العلاقة القياسية الخاصة بالضلع القائم



(ش 60)

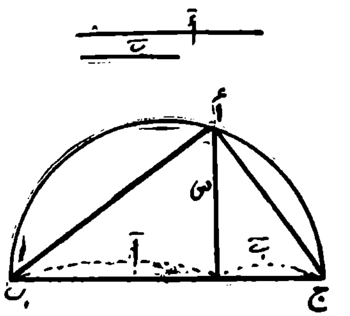
نرسم دائرة قطرها اكبر الطولين (أ) ثم نأخذ على ب ج : ج هـ = ب - العمود القائم على ب ج في (هـ) يقطع نصف الدائرة في (أ) رأس المثلث القائم أ ب ج

$$\overline{\text{أج}}^2 = \text{ج ب} \times \text{ج هـ}$$

$$\text{س}^2 = \text{أ} \times \text{ب}$$

ب) الطـريقة الثـانية : (ش 61)

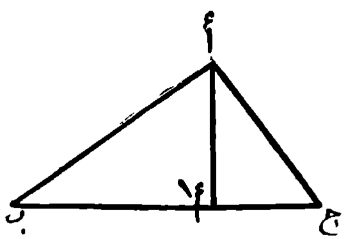
مستنتجة من النظرية الخاصة بالارتفاع
نرسم دائرة قطرها مجموع الطولين
ثم من (هـ) نرفع العمـود أ هـ وهو
ارتفاع المثلث القائم أ ب ج



(ش 61)

س ^{2} = أ × ب

199) خلاصة الدرس: العلاقات التي يجب حفظها عن ظهر قلب



(ش 62)

1") $\overline{\text{أ ج}}^2$ = ج ب × ج أ'

$\overline{\text{أ ب}}^2$ = ج ب × ب أ'

2") $\overline{\text{ب ج}}^2$ = $\overline{\text{أ ب}}^2$ + $\overline{\text{أ ج}}^2$

3") $\overline{\text{أ أ'}}^2$ = ب أ' × ج أ'

4") أ أ' × ب ج = أ ب × أ ج

تمـــــــارين

171) جِدْ وتر مثلث قائم اذا علمت قياس الضلعين القائمين (ب) و (ج)

[ب = 3 ، ج = 4] [ب = 12 ، ج = 16] [ب = 12 ، ج = 5] [ب = 2 ، 11 ، ج = 5 ، 1]

172) جِدْ الضلــع (بَ) والارتفــاع (أ ع) لمثلث قــائم إذا علمت الوتر (أ) والضلع الآخر (ج)

[أ = 30 ، ج = 18] [أ = 21 ، ج = 6،12] [أ = 25 ن ، ج = 7 ن] [أ = 37 س ، ج = 35 س]

173) جِدْ قيــاسات الاضــلاع الثلاثة والارتفاع لمثلث قــائم اذا علمت مسقطي الضلعين القائمين على الوتر :

(4 ، 9) او (2 ، 8) او (أ ، 2 أ)

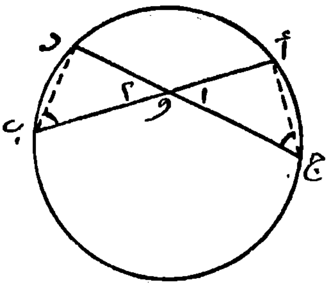
174) هب قطعة أب طولها (2أ) ـ من النهايتين (أ) و(ب) نرفع عمودين (أس) و(بص) ثم نأخذ على أس القطعة أج = أ ـ ثم نصل بين ب، ج فنحصل على المثلث أب ج ـ الارتفاع أ هـ النازل من (أ) يقطع ب ص في (د) ـ جِدْ قياسات القطع الآتية بالنسبة لـ(أ)

ب ج ، ب هـ ، ج هـ ، أ هـ ، أ د ، د هـ ، ب د ، ج د

175) جِدْ قيــاس ضلعي متوازي الضلعــين اذا علمت طول القاعــدتين 58 صمر و98،80 صمر وطول الارتفاع 17 صمر ، ما هو طول القطرين؟

الفصل الثاني — العلاقات القياسية في الدائرة

200) نظرية اولى : اذا تقاطع وتران في دائرة فان سطح جزأي الوتر الاول يساوي سطح جزأي الوتر الثاني



(ش 63)

البرهان (ش 63) :

المثلثان أوج ، بود لهما :

$\widehat{و1} = \widehat{و2}$ متقابلتان بالراس

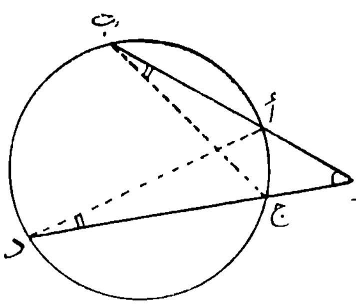
$\widehat{ب} = \widehat{ج}$ ترسمان قوسا واحدا

فهما متشابهان ـ حينئذ

$$\frac{وأ}{ود} = \frac{وج}{وب}$$

$$\boxed{وأ \times وب = وج \times ود}$$

201) نظرية ثانية: اذا انشانا من نقطة خارجية عن دائرة قاطعين فان سطح القاطع الاول في جزئه الخارجي يساوي سطح القاطع الثاني في جزئه الخارجي



(ش 64)

البرهان (ش 64) :

المثلثان وأد ، وجب لهما

$\widehat{و}$ مشتركة

$\widehat{ب} = \widehat{د}$ ترسمان قوسا واحدا

فهما متشابهان ، حينئذ :

وج / وأ = بد / وب

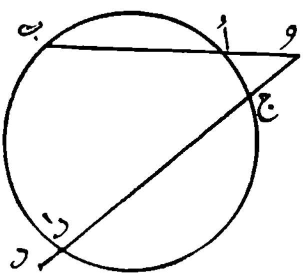
| وأ × وب = وج × ود |

202) **نظرية العكس الاولى** : اذا تقطعت قطعتان أب ، جد في (و) بحيث تكون:

وأ × وب = وج × ود

فان النقط الاربع أ ، ب ، ج ، د هي على دائرة واحدة

البرهان (ش 65) :



(ش 65)

الدائرة المارة من أ ، ب ، ج تقطع ود في د'

عملا بالنظرية السابقة نكتب :

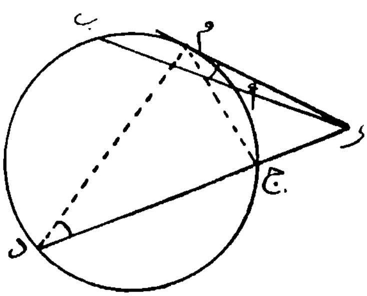
وأ × وب = وج × ود'

وبالتنظير مع علاقة الفرض نستنتج ان:

و د = ود'

اي ان : د منطبقة على د'

203) **حالة خاصة (ش 66)** :



(ش 66)

اذا دار القطاع و أ ب حول (و)

حتى انطبقت النقطتان أ ، ب إحداهما

على الاخرى اصبح القاطع مماسا

(و م) وصارت العلاقة

| و م² = و ب × و ج |

تلخص هذه العلاقة في النظرية التالية :

204) **نظرية** : اذا انشانا من نقطة خارجية عن دائرة قاطعا ومماسا كان المماس متوسطا هندسيا بين القاطع وجزئه الخارجي

205) نظرية العكس : اذا وقعت ثلاث نقط أ،ب،م على مستقيمين متقاطعين في (و) وحققت العلاقة $\overline{\text{وم}}^2 =$ وأ $\times$ وب فان وم مماش للدائرة أمب

البرهان (ش 67)

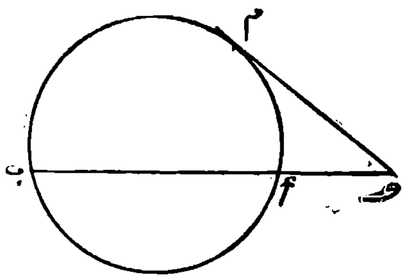
الدائرة المارة من أ،ب،م تقطع وم في نقطة ثانية م′ ـ عملا بالنظرية السابقة فان

وم $\times$ وم′ $=$ وأ $\times$ وب

وبعد التنظير مع علاقة الفرض

نستنتج ان وم $=$ وم′

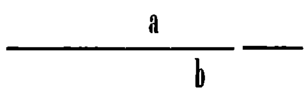
اي ان : وم مماس للدائرة



(ش 67)

206) بناء هندسي: بناء المتوسط الهندسي لقطعتين معلومتين

الفرض :



قطعتان معلومتين

المطلوب هو رسم طول (س) بحيث يكون :

$$\text{س}^2 = a \times b$$

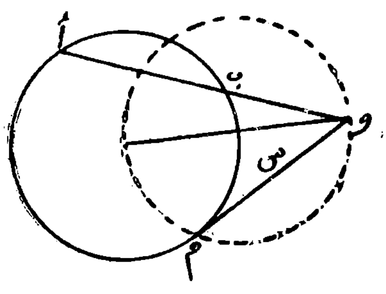
طريقة البناء :

بداية من نقطة (و) نرسم :

و أ $= a$

وب $= b$

ونبني دائرة تمر من أب ثم نسطر من (و) مماسا وم للدائرة وعملا بالنظرية 204 فان :



(ش 68)

$\overline{\text{وم}}^2 =$ وأ $\times$ وب اي : $\overline{\text{وم}}^2 = a \times b$ وم $=$ س

تمـــــارين

176) هب زاويـة $\widehat{س و ص}$ - على الضلع وس نأخذ نقطتين أ،ب بحيث ان وأ = 6 صم وب = 8 صم وعلى الضلع وص نأخذ نقطة ج بحيث ان وج = 12 صم - الدائرة المارة بالنقط أ،ب،ج تقطع وص في النقطة د - فجِدْ طول ود

177) هب دائرة (و) ونقطة داخلية م - من (م) نرسم وترين أم ب، ج م د اذا فرضت ان م أ = 5،4 صم م ب = 7،5 صم م ج = 5,1 صم فجِدْ طول م د

178) هب ثلاثة نقط أ،ب،ج على استقامة واحدة - ارسم دائرة تمر من (ب) و(ج) ثم من (أ) ارسم مماسا لها (أك) - جِدْ طول المماس أك اذ فرضت ان أب = 2،8 صم ب ج = 3،5 صم

استنتج من ذلك المحل الهندسي ل(ك) عندما تتحرك الدائرة

179) هب مثلثا أب ج قائم الزاويه في (أ) - ارسم دائرة مركزها (ب) وشعاعها (ش) تقطع الوتر ج ب في(د) و(د')، من العلاقة $\overline{ج أ}^2$ = ج د × ج د'

استنتج نظرية فيثاغورس

180) ابنِ قطعتين اذاعلمت مجموعهما (3أ) وسطحهما ($أ^2$)

181) نفس السؤال : المجموع 5أ والسطح $2أ^2$

182) ابنْ قطعتين اذا علمت الفرق بينهما (أ) وسطحها $أ^2$

183) نفس السؤال : الفرق هو 2أ والسطح $3أ^2$

184) اذا علمت القطعة (أ) فابنِ القطعتين س،ص

1") س = أ (1 + $\sqrt{2}$) ص = أ ($\sqrt{2}$ — 1)

2") س = أ (1 + $\sqrt{5}$) ص = أ ($\sqrt{5}$ — 1)

185) هب مثلثا أب ج ـ ارسم دائرة قطرها أب تقطع أج في ب′ و(ب ج)في أ′ ـ المستقيمأن أأ′ ، بب′ يتقاطعان في هـ .

1") برهن ان جهـ عمودي على أب في ج′

2") اثبت العلاقات : هأ × هأ′ = هب × هب′ = هج × هج′

186) هب مثلثا أب ج والدائرة المحيطة بـه (و) ـ منصف الزاوية Âأ يقطع الضلع ب ج في (د) والدائرة المحيطة في (ك)

1") عين موقع النقطة (ك) على القوس ب͡ج

2") برهن على ان المثلثين أدج،أبك متشابهان وكذلك المثلثين ب دك،بكأ

3") استنتج من ذلك العلاقات

ب̅ك̅² = ج̅ك̅² = كد × كأ

أب × أج = أد × أك = أ̅د̅² + ب د × دج

4") احسب أد اذا علمت ان

أب = 4 صم　　　أج = 10 صم　　　ب ج = 21 صم

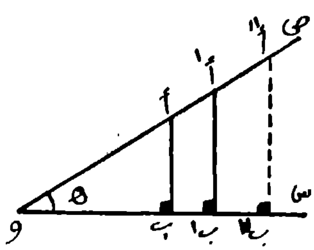
الباب الرابع

علم المثلثات

أ) مبادىء

207) تعريف : علم المثلثات يبحث في العلاقات الرابطة بين زوايا المثلث واضلاعه.

208) الخاصية الاساسية في المثلث القائم :



(ش 69)

على الضلع وص من الزاوية س و ص نأخذ نقط أ، أ'، أ'' . . . . وتنزل منها اعمدة على الضلع وس فنحصل على مثلثات قائمة: أ ب و؛ أ' ب' و، أ'' ب'' و . . . كلها متشابهة (لها زاوية حادة مشتركة) فنكتب التناسب التالي :

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}} = \frac{\text{أ و}}{\text{أ' و}} = \frac{\text{ب و}}{\text{ب' و}} \qquad \frac{\text{أ ب}}{\text{أ'' ب''}} = \frac{\text{أ و}}{\text{أ'' و}} = \frac{\text{ب و}}{\text{ب'' و}}$$

و من ذلك نستنتج :

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ و}} = \frac{\text{أ' ب'}}{\text{أ' و}} = \frac{\text{أ'' ب''}}{\text{أ'' و}} \qquad (1)$$

$$\frac{\text{ب و}}{\text{أ و}} = \frac{\text{ب' و}}{\text{أ' و}} = \frac{\text{ب'' و}}{\text{أ'' و}} \qquad (2)$$

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{ب و}} = \frac{\text{أ' ب'}}{\text{ب' و}} = \frac{\text{أ'' ب''}}{\text{ب'' و}} \qquad (3)$$

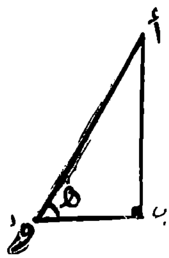
النِّسَب: $\left(\frac{\text{أب}}{\text{أو}}\right)$ ، $\left(\frac{\text{بو}}{\text{أو}}\right)$ ، $\left(\frac{\text{أب}}{\text{بو}}\right)$ ، قارة مهما كان موقع النقطة (أ) على الضلع وص؛ فهى نسب قِيَمُها مربوطة بالزاوية هـ فقط . وتسمى النسب المثلثية للزاوية الحادة هـ

209) اسمـاء النِّسَب المثلثيـة :

أ) الجَيْب : النسبة $\frac{\text{أب}}{\text{أو}}$ تسمى جيب الزاوية هـ

$$\boxed{\text{حا هـ} = \frac{\text{أب}}{\text{أو}}}$$

وهي نسبة الضلع المقابل على الوتر



ب) جيب التمـام : النسبة $\frac{\text{بو}}{\text{أو}}$ تسمى جيب التمام للزاوية هـ

$$\boxed{\text{حتا هـ} = \frac{\text{بو}}{\text{أو}}}$$

(ش 70)

وهي نسبة الضلع المجاور على الوتر

ج) الظـل : النسبة $\frac{\text{أب}}{\text{بو}}$ تسمي ظل الزاوية هـ

$$\boxed{\text{ظا هـ} = \frac{\text{أب}}{\text{بو}}}$$

وهي نسبة الضلع المقابل على الضلع المجاور

د) ظل التمام : النسبة $\frac{\text{بو}}{\text{اب}}$ تسمى ظل التمام للزوية هـ

$$\boxed{\text{ظتا هـ} = \frac{\text{بو}}{\text{أب}}}$$

وهي عكس الظل أو نسبة الضلع المجاور على الضلع المقابل

210) **ملاحظات :** أ) الجيب وجيب التمام : هما عددان اصغر من الواحد

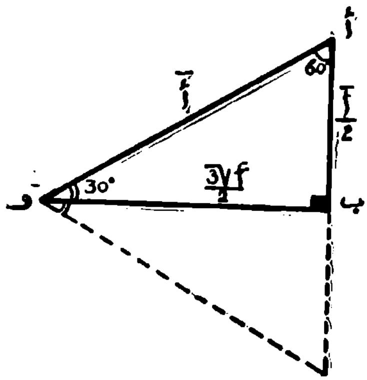
$$\boxed{\text{حا هـ} \leqslant 1} \qquad \boxed{\text{حتاه} \leqslant 1}$$

لان الضلع القائم اصغر من الوتر

ب) الظل وظل التمام : هما عددان غير محدودين .

ب) النسب المثلثية لبعض زوايا معتبرة

211) هـ $= 30^\circ$: المثلث أ ب و هو نصف مثلث متساوي الاضلاع. حينئذ :



(ش 71)

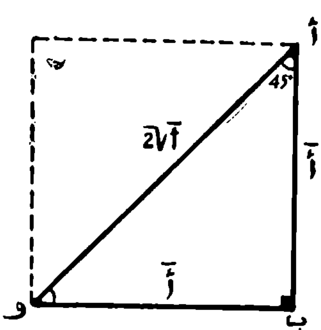
$$\text{حا } 30^\circ = \frac{\text{أب}}{\text{أو}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{حتا } 30^\circ = \frac{\text{ب و}}{\text{أو}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ظا } 30^\circ = \frac{\text{أب}}{\text{بو}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ظتا } 30^\circ = \frac{\text{ب و}}{\text{أب}} = \sqrt{3}$$

212) هـ $= 45^\circ$ (ش 72) : أب وهو نصف مربع



(ش 72)

$$\text{حا } 45^\circ = \frac{\text{أب}}{\text{أو}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{حتا } 45^\circ = \frac{\text{بو}}{\text{أو}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ظا } 45^\circ = \frac{\text{أب}}{\text{بو}} = 1$$

$$\text{ظتا } 45^\circ = \frac{\text{ب و}}{\text{أ ب}} = 1$$

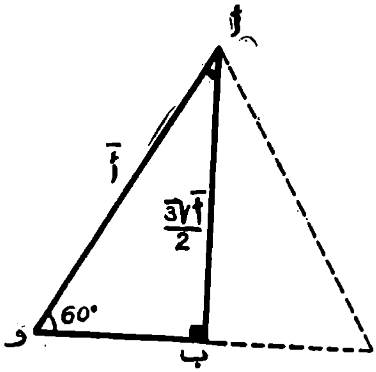
213) ه $= 60^\circ$ (ش 73)

حا $60^\circ =$ $\frac{\text{أب}}{\text{أو}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

حتا $60^\circ =$ $\frac{\text{بو}}{\text{أو}} = \frac{1}{2}$

طا $60^\circ =$ $\frac{\text{أب}}{\text{بو}} = \sqrt{3}$

ظتا $60^\circ =$ $\frac{\text{بو}}{\text{أب}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



(ش 73)

214) الجدول الآتي يلخص النتائج السابقة : ويحفـض عـن ظهـر قلـب

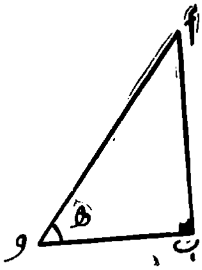
ه	30°	45°	60°
حا ه	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
حتا ه	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
طا ه	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ظتا ه	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

215) حساب النسب المثلثية لزاوية معلومة : يوجد في آخر الكتـاب جدول سجلت فيه الزوايا الحادة من الدرجة الواحـدة الى الدرجـة التسعين وقيم نسبها المثلثية .

العلاقات بين النسب المثلثية

216) <u>العلاقة الاساسية</u> : وهي تربط بين الجيب وجيب التمام

$$\text{حا ه} = \frac{\overline{\text{أ ب}}}{\overline{\text{أ و}}} \qquad \text{حتا ه} = \frac{\overline{\text{ب و}}}{\overline{\text{أ و}}}$$



(ش 74)

اذا ربعنا النسبتين وجدنا

$$\begin{cases} \text{حا}^2\ \text{ه} = \dfrac{\overline{\text{أ ب}}^2}{\overline{\text{أ و}}^2} \\[2ex] \text{حتا}^2\ \text{ه} = \dfrac{\overline{\text{ب و}}^2}{\overline{\text{أ و}}^2} \end{cases}$$

$$\text{حا}^2\ \text{ه} + \text{حتا}^2\ \text{ه} = \frac{\overline{\text{أ ب}}^2 + \overline{\text{ب و}}^2}{\overline{\text{أ و}}^2} = \frac{\overline{\text{أ و}}^2}{\overline{\text{أ و}}^2} = 1$$

$$\boxed{\text{حا}^2\ \text{ه} + \text{حتا}^2\ \text{ه} = 1}$$

217) <u>العلاقـة الثـانية</u> : وهي تربط بين الجيب وجيب التمام والظل

$$\frac{\text{حا ه}}{\text{حتا ه}} = \frac{\dfrac{\text{أ ب}}{\text{أ و}}}{\dfrac{\text{ب و}}{\text{أ و}}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب و}} = \text{ظا ه}$$

$$\boxed{\text{ظا ه} = \frac{\text{حا ه}}{\text{حتا ه}}}$$

218) <u>العلاقـة الثالثـة</u> : وهي نسبة جيب التمام على الجيب

$$\frac{\text{حتا هـ}}{\text{حا هـ}} = \frac{\frac{\text{ب و}}{\text{أ و}}}{\frac{\text{أ ب}}{\text{أ و}}} = \frac{\text{ب و}}{\text{أ ب}} = \text{ظتا هـ}$$

$$\boxed{\text{ظتا هـ} = \frac{\text{حتا هـ}}{\text{حا هـ}}}$$

نلاحظ ان (ظتا هـ) هو عكس (ظا هـ): $\text{ظتا هـ} = \frac{1}{\text{ظا هـ}}$

219) ملاحظة : اذا عرفنا احدى النسب عرفنا النسب الاخرى باستعمال العلاقات السابقة

مثال : اذا علمت ان حاس $= \sqrt{3}$ فجد قياس حتاس؛ ظاس، ظتاس

بواسطة العلاقة الاولى نحصل على حتاس

$$\text{حتا}^2\text{س} = 1 - \text{حا}^2\text{س}$$

$$\text{حتا}^2\text{س} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{حتاس} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

وبواسطة العلاقة الثانية نجد الظل

$$\text{ظاس} = \frac{\text{حاس}}{\text{حتاس}} = \sqrt{3} : \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

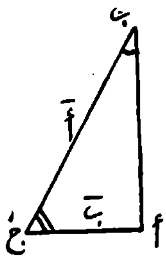
$$\text{ظاس} = \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad \text{ظتاس} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

د) المثلثـات القـائمة

220) تعـريـف : حل مثلث هو حساب عناصره المجهولة اذا عرفنا منه ثـلاثة
عناصر من بينها طول على الاقل .
والعناصر الاساسية هي الاطوال الثلاثة والزوايا الثلاث

221) العلاقات بين اضلاع المثلث القـائم وزوايـاه

حسب تعريف النسب المثلثية نعلم ان :



(ش 75)

$$\text{حاب} = \frac{\text{أج}}{\text{بج}} = \frac{\overline{\text{ب}}}{\overline{\text{أ}}} = \text{حتاج}$$

$$\text{حاج} = \frac{\text{أب}}{\text{بج}} = \frac{\overline{\text{ج}}}{\overline{\text{أ}}} = \text{حتاب}$$

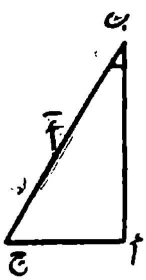
حينئـذ :

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{\text{ب}} = \overline{\text{أ}}\,\text{حاب} = \overline{\text{أ}}\,\text{حتاج} \\ \overline{\text{ج}} = \overline{\text{أ}}\,\text{حاج} = \overline{\text{أ}}\,\text{حتاب} \end{array}}$$

حل المثلثـات القائمة

222) الحـالـة الاولى : حل مثلث قائم المعلوم منه الوتر ($\overline{\text{أ}}$) والزاوية $\hat{\text{ب}}$

المجاهيل هي $\hat{\text{ج}}$ ؛ $\overline{\text{ب}}$ ؛ $\overline{\text{ج}}$



(ش 76)

الحـل

1) $\hat{\text{ج}} = 90^\circ - \hat{\text{ب}}$

2) $\overline{\text{ب}} = \overline{\text{أ}} \times \text{حاب}$

3) $\overline{\text{ج}} = \overline{\text{أ}} \times \text{حتاب}$

223) الحـالة الثـانيـة : حل مثلث قائم المعلوم منه الوتر وضلع قائم

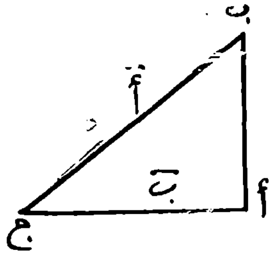
المجاهيل هي : $\overline{\text{ج}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ ، $\hat{\text{ج}}$

الحل

1") $\overline{\text{ج}}^2 = \overline{\text{أ}}^2 - \overline{\text{ب}}^2$

2") حاب $= \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

3") $\hat{\text{ج}} = 90° - \hat{\text{ب}}$



(ش 77)

224) الحالة الثالثة : حل مثلث قائم المعلوم منه القائمان

المجاهيل هي : $\overline{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{ب}}$ ، $\hat{\text{ج}}$

الحل

1") $\overline{\text{أ}}^2 = \overline{\text{ب}}^2 + \overline{\text{ج}}^2$

2") ظاب $= \frac{\text{ب}}{\text{ج}}$

3") $\hat{\text{ج}} = 90° - \hat{\text{ب}}$

تمـــــاريـن

187) هب مثلثا أ ب ج له :

أ ب = 5 صم أ ح = 6 ضم $\hat{\ }$ = 30°

1") أرسم الارتفاع ب هـ ثم احسب اطوال القطع أهـ ، ب هـ ، ج هـ

2") ما هو طول ب ج ؟

188) نفس السؤال اذا كان $\hat{\text{أ}}$ = 45° او $\hat{\text{أ}}$ = 60°

189) حل مثلثا أ ب ج قائم الزاوية في (أ) اذا علمت :

1") أ = 12 صم $\hat{\text{ب}}$ = 72°

2") أ = 25 صم $\hat{\text{ب}}$ = 29°

3") أ = 19 صم ب = 7 صم

4") أ = 43 صم ب = 18 صم

5") ب = 3 صم ج = 4 صم

6") ب = 5 صم ج = 2 صم

7") ج = 17 صم ج = 64°

190) هب مثلثا أبج متساوي الساقين (أ ج = ب ج) وارتفاعه جهـ اذا فرضت ان ج هـ = 10 صم أ ج ب = 40° فجدْ :

1") اضلاع المثلث أ ب ج

2") الارتفاع النازل من ب

3") شعاع الدائرة المرسومة وشعاع الدائرة المحيطة

191) هب مثلثـا أبج متساوي الساقين قـاعـدته تساوي نصف الضلـع أ ب ـ جدْ قيس زوايـاه

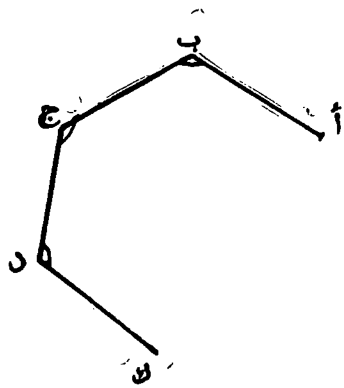
اذا فرضت الارتفاع أ هـ = 5 صم فجد اطوال الاضـلاع وشعـاع الدائرة المرسومة وشعاع الدائرة المحيطة

الباب الخامس

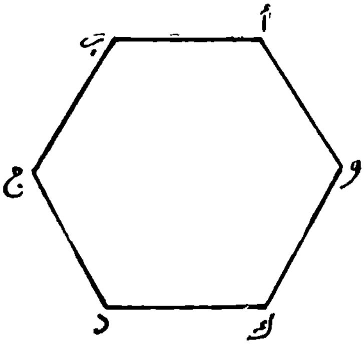
المُضَلّعات المنتظمة

الفصل الأوّل -- تعريف وبناء

225) تعريف : الخط المُضَلّع المنتظم هو خط منكسر قطعه متساوية وزواياه المحصورة بين قطعتين متواليتين متساوية (ش 78)



(ش 78)



(ش 79)

أب = بج = ج د = دك

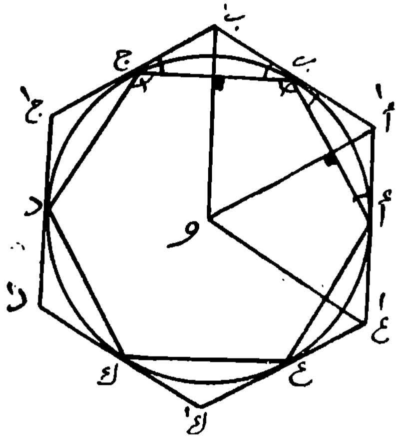
$\wedge$ ب = $\wedge$ ج = $\wedge$ د

226) المضلّع المنتظم : هو خط مضلع منتظم انطبقت نهايته على بدايته (ش 79)

227) نظريـة : إذا قسمنا محيط دائرة الى اقسام متساوية فان :

1") نقط التقسيم هي رؤوس مضلع منتظم مرسوم في الدائرة

2") المماسات للدائرة في نقط التقسيم هي اضلاع مضلع منتظم محيط بالدائرة



(ش 80)

الفرض : $\overset{\frown}{\text{أب}} = \overset{\frown}{\text{بج}} = \ldots\ldots = \overset{\frown}{\text{ع أ}}$

البرهان : أ) المضلع المرسوم : اذا وصلنا بين النقط نحصل على اوتار متساوية

أب = بج = ... = ع أ

والمضلع أ ب ج د ك ع اضلاعه متساوية

الزاوية $\hat{\text{ب}}$ هي زاوية مرسومة فهي تساوي نصف القوس المقابل لها

$$\hat{\text{ب}} = \frac{\overset{\frown}{\text{أكج}}}{2}$$

كذلك الزاوية $\hat{\text{ج}}$ المرسومة تساوي

$$\hat{\text{ج}} = \frac{\overset{\frown}{\text{بعد}}}{2}$$

حينئذ الزاويتان متساويتان والمضلع هو مضلع منتظم مرسوم

ب) المضلع المحيط : اذا رسمنا من النقط أ،ب .... ع مماسات للدائرة فانها تتقاطع وتحدث مضلعا آخر أَبَجَدَكَعَ

المثلثان أأَب، ببَج متساويا الساقين ولهما $\hat{\text{ب}}1 = \hat{\text{ب}}2$ (ترسمان قوسين متساويين)

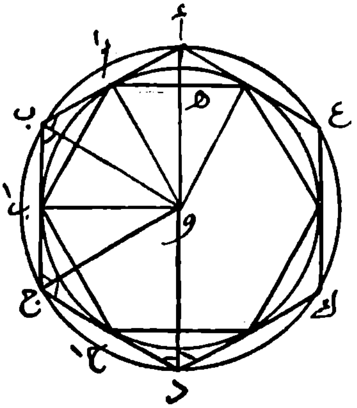
فالمثلثان متساويان ـ حينئذ :

$\widehat{\text{أأَب}} = \widehat{\text{ببَج}}$

أأَ = أَب = ببَ = بَج

والمضلع أَبَجَدَكَعَ له اضلاع متساوية وزوايا متساوية فهو مضلع منتظم محيط بالدائرة

228) نظـرية العكس : كل مضلع منتظم قابل للارتسام داخل دائرة او خارج دائرة اخرى



(ش 81)

أ) محورا أب ، ب ج يتقاطعان في (و)

(و) كائنة على محور أب

حينئذ : وأ = وب

وعلى محور ب ج

حينئذ : وب = وج

فهي مركز دائرة تمر من أ ، ب ، ج

وهي تمر ايضا من الرؤوس الاخرى

مثل (د) لانه من تساوي المثلثين المتساويي

الساقين وأب، وب ج نستنتج ان وب هو

منصف للزاوية $\widehat{(ب)}$ ؛ وج منصف للزاوية $\widehat{(ج)}$ ؛ ود منصف للزاوية $\widehat{(د)}$

المثلث وج د هو حينئذ متساوي الساقين والدائرة السابقة تمر من (د)

ب) بما ان المثلثات وأب ، وب ج ،.... المتساوية الساقين متساوية فارتفاعاتها متساوية ؛ حينئذ

وأ' = وب' = الخ....

والمركز (و) متساوي البعد عن منتصفات اضلاع المضلع فهو مركز دائرة مماسة لاضلاع المضلع المنتظم

229) تعريفات : النقطة (و) تسمى مركز المضلع

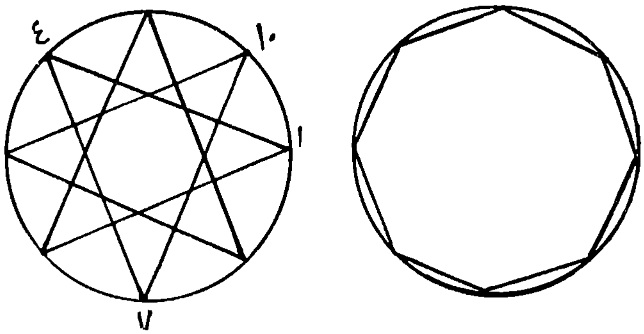
بُعْدُ مركز المضلع عن ضلع من اضلاعه يسمى عامد المضلع

230) انواع المضلعات المنتظمة :

1) المضلع المحدب : نحصل عليه بعد تقسيم الدائرة الى اقواس متساوية برسم القطع الواصلة بين النقط المتوالية

2) <u>المضلع النجمي</u> : هو مضلع مقعر نحصل عليه برسم القطع الواصلة بين نقط غير متواليه بحيث تنطبق نهاية الخط الناتج على بدايته

231) <u>مثـال</u> : المثمن المنتظم المحـدب والمثمن المنتظم النجمي (انظر الى الشـكل)

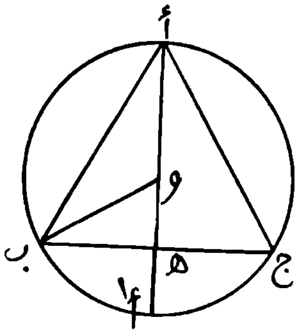


(ش 82)

ج

الفصل الثاني — حساب اضلاع المضلّعات المنتظمة

232) تمهيد : نريد ان نحسب اضلاع بعض مضلعات منتظمة بواسطة شعاع الدائرة المحيطة بها



(ش 83)

233) المثلث المنتظم : أ ب = ب ج = ج أ

الفرض : و ب = ش ؛ أ هـ ارتفاع المثلث

حساب العامد: (و) هو مركز الثقل للمثلث

حينئذ و هـ = $\frac{1}{2}$ أو

$$\boxed{\text{و هـ} = \frac{1}{2}\text{ش}}$$

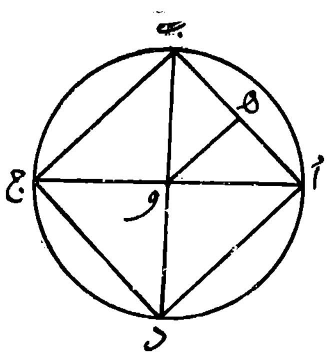
حساب الضلع : بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث و هـ ب :

نكتب : $\overline{\text{ب هـ}}^2 = \text{ش}^2 - \frac{\text{ش}^2}{4} = \frac{3\,\text{ش}^2}{4}$

$$\text{ب هـ} = \frac{\text{ش}\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{\text{ب ج} = \text{ش}\sqrt{3}}$$

الرسم : نلاحظ ان الضلع ب ج هو محور الشعاع و أ'



(ش 84)

234) المربع (ش 84) : الرؤوس الاربعة هي نهاية قطرين متعامدين

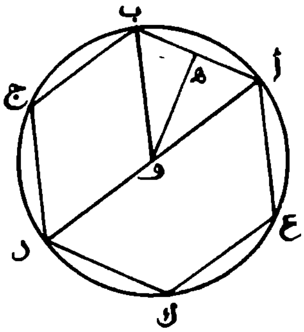
حساب الضلع :

$$\boxed{\text{أ ب} = \text{ش}\sqrt{2}}$$

حساب العامد: وهو نصف الضلع

$$\boxed{\text{و هـ} = \text{ش}\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

235) المسدّس : حساب الضلع .



(ش 85)

أوب هو مثلث متساوي الاضلاع حينئذ :

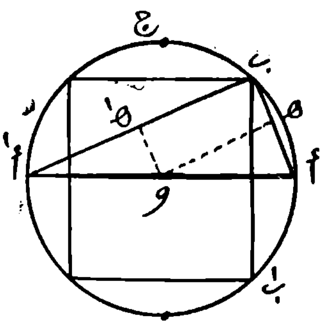
$$\boxed{\text{أ ب} = \text{ش}}$$

حساب العامد: العامد هو ارتفاع المثلث أ و ب

$$\boxed{\text{وهـ} = \text{ش} \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

236) المثمن : المثمن المنتظم نوعان : المحدب والنجمي (ش 86)

أ) المثمن المنتظم المحدب



(ش 86)

أ ب هو ضلع المثمن و (ب ب١) هو ضلع المربع .

محور ب ب١ يمر من منتصف القوس ب ب١

أ ب هو ضلع المثمن المنتظم المحدب

وهـ هو العامد

حساب الضلع : في المثلث القائم أ ب أ١

نعلم ان :

$$\overline{\text{أ ب}}^2 = \text{أ أ}' \times \text{أ ك} = 2\,\text{ش أ ك}$$

$$\text{أ ك} = \text{ش} - \text{و ك} = \text{ش} - \text{ش}\frac{\sqrt{2}}{2}$$ (و ك عامد المربع)

$$\overline{\text{أ ب}}^2 = 2\text{ش}\left(\text{ش} - \text{ش}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\,\text{ش}^2 - \text{ش}^2\sqrt{2}$$

$$\boxed{\text{أ ب} = \text{ش}\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

حساب العامد :

$$\text{وهـ} = \frac{1}{2}\,\text{ب أ}'$$

$$\overline{\text{ب أ}'}^{2} = \text{أ أ}' \times \text{أ}'\text{ك} = \text{ش}^{2}\left(\text{ش} + \text{ش}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\overline{\text{ب أ}'}^{2} = \text{ش}^{2} + \text{ش}^{2}\sqrt{2}$$

$$\boxed{\text{وهـ} = \frac{1}{2}\,\text{ش}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

ب) المثمن المنتظم النجمي

اذا وصلنا رؤوس المثمن بمستقيم يصل الرأس الاول بالرابع ثم الرابع بالسابع الخ حصلنا على المثمن المنتظم النجمي

في الشكل السابق (86) نلاحظ ان ب أ' هو الضلع و (وهـ') هو العامد

الضلع	$\text{أ}'\text{ب} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$
العامد	$\text{وهـ}' = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

237) الجدول الملخص للنتائج السابقة : (انظر الى الصفحةالتالية)

المضلع	عدد الاضلاع	الضلع	العامد
مثلث	3	ش $\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$ ش
مربع	4	ش $\sqrt{2}$	ش $\frac{\sqrt{2}}{2}$
مسدس	6	ش	ش $\frac{\sqrt{3}}{2}$
مثمن محدب	8	ش $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$ ش $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$
مثمن نجمي	8	ش $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$ ش $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

ج) محيط الدائرة

238) نظرية : طول محيط الدائرة يساوي سطح طول قطرها في عدد قار يسمى (π) يساوي : 3ر1416

تقبل هذه النظرية بدون دليل ويبرهن على صحتها في القسم الخامس

$$\boxed{\text{محيط الدائرة} = \pi \times 2 \text{ ش}}$$

239) ملاحظة : القيمة π = 3ر1416 هي قيمة تقريبية والنقص فيها هو دون $\frac{1}{10000}$

240) طول قوس : اذا كان لنا قوس محصور بين ضلعي زاوية مركزية قيمتها (ن) درجة فطول القوس يساوي :

$$\text{ط} = \frac{2\pi \text{ ش} \times \text{ن}}{360}$$

تمــــــارين

192) ابْنِ مسدسا اذا علمت طول ضلعه : 2 صم

193) ابن مسدسا ا ب ج د ﮪ ع ثم اجمع بين رؤوسه الاول والثالث والخامس ثم الثاني والرابع والسادس فتحصل على مثلثين منتظمين ـ نقط تقاطع المثلثين تكون مسدسا آخر ـ جِدْ طول ضلعه بالنسبة لطول ضلع المسدس المفروض

194) احسب شعاع الدائرة المحيطة وشعاع الدائرة المرسومة لمربع طول ضلعه (أ) او لمسدس طول ضلعه (أ) او لمثلث منتظم طول ضلعه (أ)

195) استنادا على قياسات اضلاع وعوامد المثمن المنتظم ـ جد الجيب وجيب التمام وظل الزاوية $22^\circ 30'$ والزاوية $67^\circ 30'$

196) ﮪ ب في دائرة وترين متوازيين طول الاول يساوي ضلع المسدس المرسوم وطول الثاني يساوي ضلع المثلث المنتظم المرسوم ـ الوتران من ناحية واحدة بالنسبة للمركز

1") جد بالنسبة للشعاع الطوال ارتفاع واضلاع متوازي الضلعين الذي يكون الوتران السابقان قاعدتيه

2") جـد قيس زوايا متوازي الضلعين

197) قوس أب يساوي 36° وطوله 2،50م ـ جد شعاع الدائرة الحاملة له

198) جد طول القـوس الذي يساوي درجـة واحدة ؛ دقيقـة واحدة ؛ ثانيـة واحدة ؛ غرادا واحدا ؛ اذا كان القوس على الدائرة الكـروية التي شعاعها 40.000 كم

199) على دائرة شعاعها 72م نعتبر قوسا طوله 3،60م ـ جد قيس القوس بالدرجات ثم بالغرادات

200) نعتبر على دائرة شعاعها 2م الاقواس الآتية :

18° ؛ 35 غراد 72° ؛ 172°

ما هو طول هذه الاقواس ؟

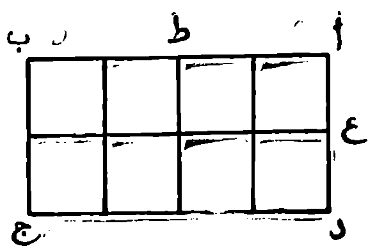
الباب السادس

المساحات

241) **تعريف :** مساحة السطوح تقاس بمقارنتها مع سطح آخر نعتبره وحدة المساحات

242) **وحدة المساحات :** هي مساحة مربع طول ضلعه يساوي وحدة الاطوال

أ) مساحة المستطيل



(ش87)

قيس الطول هو: ط وقيس العرض: ع

243) **الحالة الاولى : ط ، ع عددان صحيحان**

مثال : ط $= 4$ ع $= 2$

المساحة : $1^2 \times 4 \times 2$

$\boxed{\text{مس} = 1^2 \times \text{طع}}$

244) **الحالة الثانية : ط ، ع عددان كسريان**

مثال : ط $= \frac{16}{7}$ من وحدة الاطوال ع $= \frac{5}{3}$ من وحدة الاطوال

بعد توحيد المقامين نجد ط $= \frac{48}{21}$ ع $= \frac{35}{21}$

إذا اخذنا وحدة لقيس الاطوال مساوية لـ $\left(\frac{1}{21}\right)$ من الوحدة الاولى صار الطول والعرض يساويان

$ط_1 = 48$ $ع_1 = 35$

واصبحت وحدة المساحات $\left(\frac{1}{21}\right)^2$ من وحدة المساحات الاولى

$$\text{مس} = \left(\frac{1}{21}\right)^2 \times 48 \times 35 = 1^2 \times \frac{48}{21} \times \frac{35}{21}$$

$$\text{مس} = 1^2 \times \frac{16}{7} \times \frac{5}{3} = 1^2 \times \text{ط} \times \text{ع}$$

245) الحالة الثـانية : ط ، ع عددان جذريان ـ تكون النتيجة ايضا :

$$\text{مس} = 1^2 \times \text{ط} \times \text{ع}$$

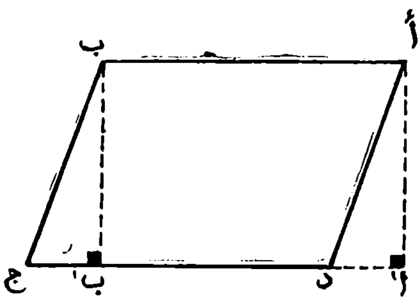
246) نظريـة : (تقبل بدون دليل) مساحة المستطيل تساوي جُدْاء الطـول في العرض (او جداء القاعدة في الارتفاع)

247) مـلاحظـة : مساحة المربع هي مساحة مستطيل تساوي فيه الطول والعرض

$$\boxed{\text{مس} = \text{ط}^2}$$

مساحـة متوازي الاضلاع

248) نظريـة : مساحـة متـوازي الاضـلاع تساوي جداء القـاعدة في الارتفاع (ش 88)



(ش 88)

أ ب = قـاعدة = قـا

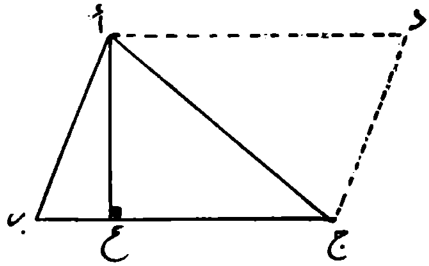
ب ب' = ارتفاع = أ ع

المثلثان أ أ' د ، ب ب' ج متساويان ومساحتاهما متساويتان حينئـذ مساحـة متوازي الاضلاع تساوي مساحة المستطيل أأ' ب ب'

$$\boxed{\text{مس} = \text{قا} \times \text{أ ع}}$$

مساحـة المثلث

249) نظريـة : مساحـة المثلث تساوي نصـف جـداء القـاعـدة في الارتفاع (ش 89)



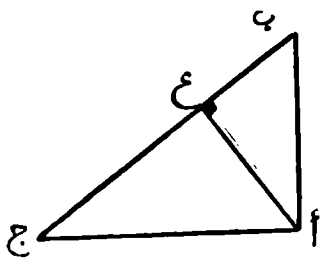
(ش 89)

أ ب ج د متوازي الضلاع ومساحة أ ب ج هي نصف مساحته

$$\boxed{\text{مس} = \frac{1}{2}\,\text{قا} \times \text{أع}}$$

250) مساحة المثلث القائـم :

تسـاوي نصـف جـداء الضلعيـن القائمين (ش 90)



(ش 90)

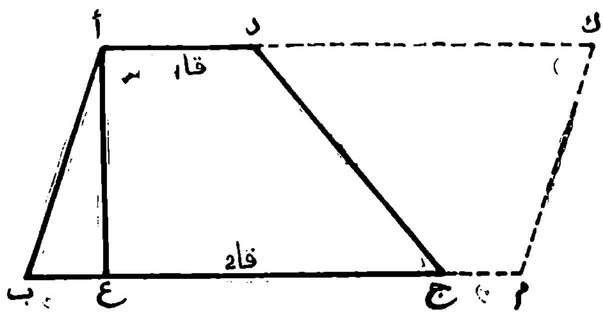
$$\text{مس} = \frac{1}{2}\,\text{أب} \times \text{أج}$$

او بتطبيق القاعدة العامة

$$\text{مس} = \frac{1}{2}\,\text{ب ج} \times \text{أع}$$

مساحـة متوازي الضلعين

251) نظريـة : مساحة متوازي الضلعين تساوي نصف جداء مجموع القـاعدتين في الارتفاع (ش 91)



(ش 91)

ج م = أد   دك = ب ج

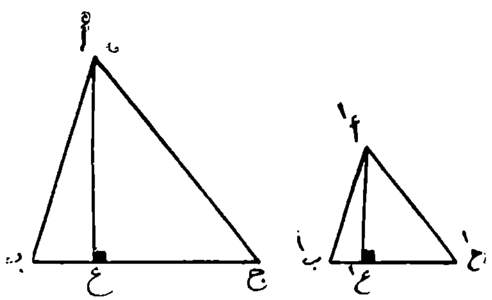
أبمك متوازي الاضلاع يساوي ضعف متوازي الضلعين

$$مس = \frac{1}{2}\left(ب م \times أع\right) = \frac{1}{2}\left(ب ج + أد\right) أع$$

$$\boxed{مس = \frac{قا_1 + قا_2}{2} \times أع}$$

ب) المضلّعات المتشابهة

252) **نظرية :** نسبة مساحتيْ مثلثين متشابهين تساوي مربع نسبة التشابه



(ش 92)

نعتبر مثلثين متشابهين أبج ، أ' ب' ج' (ش 92)

نعلم ان نسبة التشابه هي

$$ن = \frac{أ'ب'}{أ ب}$$

فنسبة الارتفاعين هي أيضا : ن

$$مس (أبج) = \frac{1}{2} ب ج \times أع$$

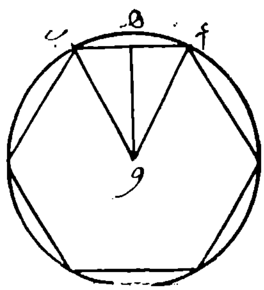
$$\text{مس}\ (\text{أ}'\text{ب}'\text{ج}') = \frac{1}{2}\ \text{ب}'\text{ج}' \times \text{أ}'\text{ع}'$$

$$\frac{\text{مس}_1}{\text{مس}_2} = \frac{\text{ب}'\text{ج}'}{\text{ب ج}} \times \frac{\text{أ}'\text{ع}'}{\text{أ ع}} = \text{ن}^2$$

253) تعميم النظرية السابقة : نسبة مساحتي مضلعين متشابهين تساوي مربع نسبة التشابه

$$\boxed{\frac{\text{مس}_1}{\text{مس}_2} = \text{ن}^2}$$

254) نظريـة : مساحة المضلع المنتظم تساوي جداء عامده في نصف محيطه



(ش 93)

إذا كان عدد الاضلاع هو ن فان مساحة المضلع تساوي ن × مساحة المثلث أ و ب

$$\text{مس} = \text{ن} \times \frac{1}{2}\ \text{أب} \times \text{وه}$$

$$\text{مس} = \frac{1}{2}\left(\text{ن} \times \text{أب}\right) \times \text{ع}$$

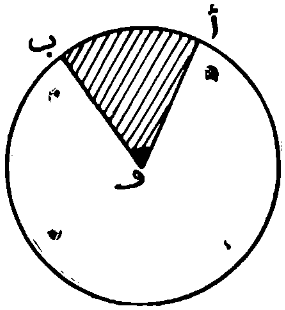
$$\boxed{\text{مس} = \frac{1}{2}\ \text{محيط} \times \text{ع}}$$

ج) مساحة الدائرة

255) حساب مساحة الدائرة : نظرية : مساحة الدائرة تساوي جداء مربع شعاعها في العدد (π)

$$\boxed{\text{مس} = \pi\ \text{ش}^2}$$

الدليل في القسم الخامس



(ش 94)

256) القطاع : القطاع هو قطعة دائرة محصورة بين شعاعين والقوس المرسوم بينهما (ش 94)

يتعين القطاع بمعرفة ش والزاوية $\widehat{\text{أ و ب}}$

257) مساحة القطاع :

$$\widehat{\text{أوب}} = \text{ه درجات}$$

$$\text{مس (أ و ب)} = \frac{\pi\ \text{ش}^{2} \times \text{ه}}{360}$$

تمـــــــارين

201) جد مساحة مثلث منتظم بالنسبة لضلعه (a)

202) هب مثلث أب ج وارتفاعه أ هـ = ل - جدْ بالنسبة لـ (ل) اضلاعه ومساحته
اذا علمت قياس الزاويتين :

$\widehat{ب} = 45°$ $\widehat{ج} = 30°$

203) المثلث أب ج له زاوية $\widehat{ب} = 45°$ وزاوية $\widehat{ج} = 60°$ وضلعه ب ج = a
جِدْ بالنسبة لـ (a) طول ضلعيه الآخرين وارتفاعه أ هـ ومساحته

204) ما هي مساحة متوازي الاضلاع الـذي احـد اضلاعه يسـاوي (a) والآخر
يساوي (2a) واحدى زواياه 60°

205) مـا هي مسـاحة معين ضلعه يسـاوي (a) واحدى زواياه 60° - مـا هي
قيمة (a) لتكون مساحة المعين مترا مربعا

206) برهن ان مساحة المعين تساوي نصف جداء القطرين
تطبيق : اذا كان احد القطرين يساوي ضعف الآخر فجِدْ طولهما لتكون
المساحة مترا مربعا وجد عندئذ طول الضلع

207) نمدد في كل ضلع من اضلاع مثلث وحسب اتجاه واحـد بقطعـة مسـاوية
للضلع نفسه فنحصل على مثلث ثان
برهن ان مساحته تساوي 7 مرات مساحة المثلث المفروض

208) هب مثلثا أب ج مرسومـا في دائرة شعاعها ش - طـول الضلـع أج يساوي
طول مثلث منتظم مرسوم وطول الضلع أب يساوي طول ضلع المربع المرسوم
1") جد قيم زوايا المثلث أب ج
2") ارسم الارتفـاع أ هـ ثم جـد الاطـوال ب هـ ، أهـ، هـ ج ومساحة المثلث
أب ج بالنسبة لـ (ش)

209) جد قاعدتَيْ متوازي الضلعين اذا علمت مسـاحته 348 م^2 وارتفـاعـه 12 م
وللفرق بين القاعدتين 18 م

210) جـد مساحـة متـوازي الضلعين أ ب ج د اذا علمت طـول القـاعـدة الكبرى أب = $2a$ والزاوية $\hat{أ}$ 45° والزاوية $\hat{ب}$ = 60° والضلع ب ج = a

211) جد مساحة مسدس بالنسبة لطول ضلعه (a)

212) رباعي أ ب ج د له قطران متعامدان ـ جد مساحته اذا علمت أج = 18 صم
ب د = 40 صم

213) جـد مساحة دائرة شعاعها يساوي 15 صم أو 15 م أو 1050 م

214) ما هو شـاع دائرة مساحتها 1 م^2 او آرا او 250 صم^2

215) جد مساحة دائرة اذا علمت طون محيطها : (200 م)

216) جد مساحة الدائرة المحيطـة لمثلث منتظم ضلعـه (a) ثم مساحـة الدائـرة المرسومة في المثلث نفسه ـ وجد قيمة (a) اذا كانت المساحـة المحصـورة بين الدائرتين (الاكليل) تساوي 20 صم^2

217) جد مساحة القطاع بالنسبة لـ (ش) اذا كانت زاوية القطاع تساوي :
30° ؛ 60° ؛ 120° ؛ 240°

تمارين ومشاكل عامة

مقتبسة من مواضيع امتحانات السنة الرابعة

أ ـ جبر

218) اختزل الكمية الآتية

$$\frac{\dfrac{\text{س}^2+\text{ص}^2}{\text{ص}}+2\text{س}}{\dfrac{1}{\text{ص}}+\dfrac{1}{\text{س}}}+\frac{2\text{ص}-\dfrac{\text{س}^2+\text{ص}^2}{\text{س}}}{\dfrac{1}{\text{ص}}-\dfrac{1}{\text{س}}}$$

219) اذا فرضت ان (أ) و (ب) هما عددان معلومان استخرج س ، ص من المعادلتين

$$\begin{cases}\dfrac{\text{س}}{\text{أ}+\text{ب}}+\dfrac{\text{ص}}{\text{أ}-\text{ب}}=2\text{أ}\\[2ex]\dfrac{\text{س}-\text{ص}}{2\text{أ}\,\text{ب}}=\dfrac{\text{س}+\text{ص}}{\text{أ}^2+\text{ب}^2}\end{cases}$$

220) اولا : اختزل الكمية الآتية

$$\text{ص}\,1=\frac{\dfrac{\text{س}-2}{\text{س}+2}-\dfrac{\text{س}+2}{\text{س}-2}}{\dfrac{3}{\text{س}+2}-\dfrac{3}{\text{س}-2}}$$

ثم ارسم المستقيم البياني (د 1) للتابع ص 1

ثانيا : بالنسبة لمنتظم المحاور السابق رسم الخطين البيانيين الآتيين

$$ص\ 2 = \frac{س}{3} - 5 \qquad (د\ 2)$$

$$ص\ 3 = -3\ س + 5 \qquad (د\ 3)$$

ثالثا : جد احداثيات نقط تقــاطع المستقيمات الثلاث (د1) و (د2) و (د3)

221) أ ـ رسم الخطين البيانين للتابعين

$$ص\ 1 = 2\ س - \frac{3}{2} \qquad ص\ 2 = -\frac{س}{2} + 1$$

جد احداثيات نقطة تقاطع المستقيمين السابقين

ب ـ على المستقيم (د 1) نعتبــر النقطــة (أ) فصلهــا س = ـ 1 وعلى المستقيم (د 2) نعتبر النقطة (ب) فصلها س = + 2 ـ اجمع بين أ ، ب ثم جد معادلة المستقيم أ ب

ج ـ من نقطة الاصل نرسم مستقيما موازيا لـ (أب) ما هي معادلته

222) هب السلسلة

$$\begin{cases} 5\ س + 2\ ص = 18 & (1) \\ -2\ س + ن\ ص = 4 & (2) \end{cases}$$

ن عدد جبري معلوم

أ ـ جد قيم س ، ص بالنسبة لـ (ن) ـ ثم جد قيم ن لنحصل على ص' = 2س

ب ـ المعـادلة (1) تمثل التابع ص بالنسبة للمتغير س ـ رسم الخط البياني لذلك التابع

223) أ ـ حل السلسلة الآتية حلا بيانيا :

$$\begin{cases} ص + س - 1 = 0 & (1) \\ ص + 2س - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$ (طول واحدة القيس 1 صم)

ثم جد النتائج السابقة بطريقة الحساب الجبري

ب ـ من نقط الاصل (م) انزل و هـ عمودا على المستقيم (2) ما هي معادلة المستقيم م هـ

ج ـ جد احداثيات النقطة (هـ) ثم طول القطعة م هـ

224) نعتبر منتظم الاحداثيات م س ، م ص والنقطتين أ (ـــ 42؛ + 1) ب(4؛6)

1") ما هي معادلة المستقيم م أ ـ وما هو طول القطعة م ب

الموازي لمحور السينات المار من (ب) يقطع م أ في (ج) ماهي احداثيات (ج)

2") جد مساحات المثلثات أ ب ج ، م ب ج ، أ م ب ثم طول ارتفاع المثلث أ م ب النازل من (أ)

225) 1") ابن مثلثا أ ب ج اطوال اضلاعه هي

أ ب = 5 صم أ ج = 7 صم ب ج = 3 صم

2") نعتبر النقطة (م) على الضلع (أ ب) او على امتداده ونضع أ م = س ـ الموازي لـ (ب ج) المار من (م) يقطع أ ج في (ك)

جد محيط متوازي الضلعين ب ج م ك بالنسبة لـ (س) ـ رسم الخط البياني لتغييرات ذلك المحيط عندما النقطة (م) تتحرك على نصف المستقيم أ س الحامل لـ (أ ب)

226) هب مستطيلا أ ب ج د (أ ب = 8 صم ، أ د = 6 صم) ونقطة (م) على أ ب بحيث ان أ م = س ـــ من (م) نرسم م ك موازيا للقطر أ ج (النقطة ك كائنة على ب ج) ثم نرسم م هـ موازيا للقطر ب د (النقطة هـ كائنة على أ د)

1") احسب طول د ب ـــ ثم احسب الطولين م ك ، م هـ بالنسبة لـ (س) وذلك بواسطة مثلثات متشابهة ـ ما هو مجموع الطولين (م ك + م هـ)

2") احسب بالنسبة لـ (س) قيمة النسبة $\frac{\text{م ك}}{\text{م هـ}}$ وجد قيم (س) لتكون هاته النسبة مساوية لـ (3) ؟ او مساوية لـ (1) ؟

عين موقع (م) على أ ب لتكون النسبة السابقة اكبر من 2

3") رسم الخطين البيانيين لتغييرات م ك ، م هـ عندما (م) تتحرك على أ ب من (أ) الى (ب)

227) 1") هب مستقيما معادلته

3 س + 4 ص = 12

ما هي احداثيات (أ) نقطة تقاطعه مع المحور م س ثم احداثيات (ب) نقطة تقاطعه مع المحور م ص ـــ

ما هو طول أب ؟ جد معادلة الموازي لـ (أب) المار من نقطة الاصل(م)

2") نعتبر النقطة ك على محور السينات فصلها يساوي (a) ـ الموازي لـ (أب) المار من (ك) يقطع محور الصادات في ن ـ ما هي احداثيات (ن) بالنسبة لـ (a) ـ جد طول القطعة ك ن

3") العمود القائم على م س في (ك) والعمود القائم على م ص في (ن) يتقاطعان في (ج) ـ ما هي العلاقة الرابطة بين احداثيي (ج) ؟ استنتج من ذلك المحل الهندسي لـ (ج) عند ما تتحرك (ك) على م س

228) خرج دراج من مدينة (أ) على الساعة الثامنة صباحا وقصد مدينة (ب) بسرعة تساوي 20 كم في الساعة ـ بعد مكوث ساعة واحدة في (ب) كر راجعا الى (أ) بسرعة تساوي 15 كم فوصلها في الساعة 17 س 45 دقيقة

1") ما هو طول المسافة أب ؟

2")رسم الخط البياني لحركة الدراج منذ خروجه من مدينة (أ) الى رجوعه اليها

3") عند الزوال (12 س) خرجت سيارة من (أ) واتجهت نحو (ب) بسرعة مساوية لـ (60 كم) ـ في اي ساعة التحقت السيارة بالدراج وفي اي موقع وقع التلاقي بالنسبة للمدينة (أ)

229) 1") مر قطار طوله 300 م امام رجل ساكن فدام مرور القطار 36 ثانية ما هي سرعة القطار ؟

2") تلاقى هذا القطار مع قطار آخر يسير في اتجاه معاكس فدام تلاقيهما 24 ثانية (اي ان الزمن الذي مر بين تلاقي رأسي القطارين وافتراق ذنبيهما هو 24 ثانية)

اما القطار الثاني فهو يمر في 18 ثانية امام رجل ساكن

ما هي سرعة القطار الثاني وما هو طوله

230) 1″) هب نقطة (أ) احداثياها هما س $=9$ ص $=6$
ما هي معادلة المستقيم م أ (م نقطة الاصل)

2″) اذا كانت (هـ) في مسقط (أ) على م س جد فصل النقطة (ب) الكائنة على م س بحيث ان المثلث م أ ب يكون قائما في (أ) - ما هي معادلة المستقم (أ ب)

231) رسم الخطين البيانيين للتابعين :

ص 1 $=$ 2 س ص2 $=$ 3 س — 6

1″) ما هي احداثيات نقطة تقاطعهما (ك)

2″) نعتبر النقطة (ن) احداثياها س — 2؛ ص $=$ — 3

ما هي معادلة المستقيم كن

3″) ما هو طول القطعة كن

232) هب النقطة (ك) على محور السينات ($\overline{\text{م ك}} = a$) والنقطة (ن) على محور الصادات ($\overline{\text{م ن}} = b$) ثم ابن المستطيل م ك هـ ن

1″) ما هي معادلتي المستقيمين م هـ ، كن - ما هو ميلان كل واحد منها - من (هـ) ننزل العمود (هـ هـ′) على ك ن - ما هي معادلة هـ هـ

2″) اذا فرضت أن $a = b\sqrt{3}$ ما هي قيمة الزاوية $\widehat{\text{هـ م ك}}$ (a، b عددان موجبان) - استنتج من ذلك المحل الهندسي لـ (هـ) عند ما تتحرك النقط (ك)و(ن) - برهن ان العود (هـ هـ′) يبقى موازي لاتجاه معلوم ما هو ميلان هذا الاتجاه

3″) اذا فرضت ان ($a + b = 9$) (a ، b موجبان) اوجد المحل الهندسي لـ (هـ) عند ما تتحرك النقط (ك) و (ن)

ب) هندسة

233) هب مثلثا أ ب ج مرسوما في دائرة (و) ـ منصف الزاوية الداخلية $\widehat{أ}$ يقطع الضلع ب ج في (د) والدائرة في (م)

1") برهن على ان (م) هو منتصف القوس ب ج

2") جد مثلثين مشابهين للمثلث أ ب ج واستنتج من ذلك العلاقتين

$$\overline{م ج}^2 = م أ \times م د \qquad أ ب \times أ ج = أ م \times أ د$$

3") ما هو موقع م ج بالنسبة للدائرة المحيطة بالمثلث أ د ج

4") اذا فرضت ان شعاع الدائرة (و) يساوي ش = 6 صم وان المركز (و) كائن عن بعد مساو لـ (4 صم) بالنسبة لـ (ب ج) جد طول القطعة م ج

134) هب مثلثا أب ج ـ على اضلاعه الثلاث نبني مثلثات منتظمة أبك ، أج د ، ب ج ن ثم نبني الدائرتين (و 1) و (و 2) المحيطتين بالمثلثين أبك ، أج د الدائرتان تتقطعان في (ي)

1") احسب قيم الزوايا $\widehat{أيب}$ ، $\widehat{أيج}$

2") برهن على ان الدائرة المحيطة بالمثلث ب ج ن تمر من (ي)

3") برهن على ان (أي) يمر من (ن) وان (بي) يمر من (د) وان (جي) يمر من (ك)

4") برهن على ان أن = ب د = ج ك

235) هب مثلثا أ ب ج قائما في (أ) ـ على الضلعين أب ، أج نبني مربعين أ ب د ن ، أ ج ك م

1") برهن على ان النقط د ، أ، ك هي على استقامة واحدة

2") من (ب) نقيم عمودا على ب ج فيقطع دن في (هـ) برهن على ان المثلثين ب د هـ ، ب أ ج متساويان

3") المستقيم ج ه يقطع دك في (ي) بـرهن على ان (ي) هو منتصف ج ه ومنتصف دك

4") برهن على ان الرباعي ب ه ن ج يقبل الارتسام في دائرة ـ عين مركز وشعاع تلك الدائرة ـ برهن على انها تمر من (م)

236) هب مثلثا منتظما أ ب ج ضلعه يساوي (a) ـ على الضلـع ب أ نعتبـر قطعة (ب د) وعلى امتداد الضلع أ ج نعتبر قطعة (ج ن) مساوية لـ (ب د) ـ ثم نبني متوازي الاضلاع الذي يكون (ب ن) و (ب د) ضلعان من اضلاعه

1") جد المحل الهندسي للراس الرابـع (م) لمتوازي الاضلاع هذا عند ما تتحرك (د) على ب أ

2") اذا فرضت أ ن ب د $=$ a برهن على ان متوازي الاضلاع هو مستطيل احسب مساحته

237) هب مربعا ا ب ج د والـدائـرة المحيطـة به (و ؛ ش) ـ ابـن المسدس ان ك ج م ه المرسوم في نفس "الدائرة والذي له راسان (أ،ج) مشتركان مع المربع ـ ن ك يقطع أ ب في (س) ويقطع ب ج في (ص)

1") برهن على ان المثلثين ب س ص ، ب أ ج متشابهان

2") احسب اضلاع المثلث ب س ص بالنسبة لـ (ش) واحسب ايضا ارتفاعه النازل من (ب)

3") احسب مساحة الرباعي أ س ص ج

4") احسب مساحة القطاع ن و ب

238) رسم نصفي مستقيم و س و ص متعـامدين ثم خـذ على و س نقطـة (أ) بحيث ان و أ $=$ a وعلى وص نقطة (ب) بحيث ان وب $=$ b ($a > b$)

1") موسطات المثلث أ و ب تتقـاطـع في (ك) ـ احسب بالنسبة لـ (a ، b) بعدي (ك) عن وس ، وص

2") م ، ن ، ه هي منتصفات و أ ، وب ، أب ـ (وع) هـو ارتفـاع المثلث و أ ب ـ برهن على ان النقط و ، ع ، ن ، م ، ه ، كائنة على دائرة واحدة عين مركز وشعاع هاته الدائرة

3") نفرض ان (أ) تبقى ثابتة وان (ب) تتحرك على وص ـ جـد المحل الهندسي للنقط ع ، هـ ، ك

4") عين قيمة الزاوية و $\widehat{\text{أ ب}}$ ليكون المثلث و ع هـ متساوي الساقين

239) هب مثلثا منتظمـا أ ب ج ضلعــة يساوي (a) ـ من نقطـة (ك) كائنة على الضلع ب ج ننزل العمود ك م على ب أ والعمود ك ن على الضلع ج أ

1") برهن على ان (ك م + ك ن) يبقى قارا عند ما تتحرك (ك) على ب ج جد قيمة ذلك المجموع بالنسبة لـ (a)

2") (س) هي النقطة المقابلة لـ (ك) بالنسبة للضلع أ ب و (ص) هي النقطة المقابلة لـ(ك) بالنسبة للضلع أ ج ـ جد المحلين الهندسين لـ (س) ولـ (ص) عند ما تتحرك (ك) على ب ج

3") متوازي الاضلاع ك ص هس الذي يكـون ك س ، ك ص ضلعــان من اضلاعه ـ جد المحل الهنـدسي لـ (هـ) عند ما تتحــرك (ك) على ب ج

240) هب مثلثا منتظما أ ب ج :

1") ابن الدائرة (و) المماسة للضلع أ ب في(ب)وللضلع أ ج في(ج) ـ برهن على ان هاته الدائرة مساوية للدائرة المحيطة بالمثلث أ ب ج

2") نعتبر نقطة (ك) على القوس ب ج داخــل المثلث أب ج ـ المستقيم ب ك يقطع أ ج في (م) والمستقيم ج ك يقطــع أ ب في (ن) ـ برهـن على ان القطعتين أن ، ج م متساويان

3") برهن على ان الرباعي ا ن ك م يقبل الارتسام في دائرة

4") اثبت العلاقة الآتية :

$$\text{ج ك} \times \text{ج ن} = \text{ج م} \times \text{ج أ}$$

241) هب دائرة مركزها (و) وشعاعهــا (ش) ـ نعتبر قـوسا منها $\widehat{\text{أ ب}} = 120^\circ$

1") على الشعاع و أ نـأخذ نقطة (ك) ونضع أ ك = س ثم نــرسم الــدائرة قطرها أ ك فتقطع الوتر أ ب في (ن) ـ احسب بالنسبة لـ (س) اضلاع المثلث أ ك ن ـ

2") العمود القائم على وأ في (و) يقطع أب في (م) ـ احسب طول القطع م أ
م و ، م ب بالنسبة للشعاع (ش)

3") برهن على ان النقط م ، ن،و ، ك كائنة على دائرة واحدة ـ ما هي
العلاقة الرابطة بين (س) و (ش) لتكون هاته الدائرة مساوية للدائرة
قطرها أ ك

242) هب مربعا أبجد ضلعه يساوي (a) وقطراه أج ، ب د يتقاطعان في (و) -
من رؤوس المربع الاربعة كمراكز نرسم اربع دائرات تمر جميعها من (و)
فتقطع كل ضلع من اضلاع المربع في نقطتين : ن ، ك على الضلع أب ـ م ، ه
على الضلع ب ج ـ ي ، ع على الضلع ج د ـ س ، ص على الضلع د أ ،

1") احسب زوايا المثلث ب و ن ـ برهن على ان المثلثين ن و ك . ص و ن
متساويان ـ ماذا نستنتج من ذلك بالنسبة للمضلع (ن ك م ه ي ع س ص)

2") احسب القطع ن ك ، و ن ، ن ص بالنسبة لـ (a) استنتج من ذلك أن
ن ك $=$ ن ص

3") احسب مساحة المضلع (ن ك م ه ي ع س ص) بالنسبة لـ (a)

243) هب ثلاث نقط أ ، ب،م على استقامة واحدة بحيث ان أب $=$ 4a ب م $=$ 2a

1") جد نقطة (ك) خاضعة للعلاقة $\frac{\text{ك أ}}{\text{ك ب}} = \frac{\text{م أ}}{\text{م ب}}$

2") من النقط أ ، ك ، ب نقيم ثلاث اعمدة على أب ، أص ، ك س ، ب ط ـ
قاطع متحرك يقطع الاعمدة الثلاثة في النقط أ' ، ب' ،ك'

ماذا تلاحظ في قيمة النسبة $\frac{\text{ك' أ'}}{\text{ك' ب'}}$ ؟ ولماذا ؟

3") نعتبر نقطة ي على ك س ونفرض ان ك ي $=$ س المستقيم أي يقطع
ب ط في (ب') والمستقيم ب ي يقطع أص في (أ') ـ احسب طول القطع
أ أ' ، ب ب' بالنسبة لـ (س) ـ برهن على ان أ'ب' تقطع أ ب في نقطة
ثابتة ـ عين موقع هاته النقطة

4") جد قيمة (س) بالنسبة لـ (a) اذا فرضت $\text{أ'ب'} = a$

5") جد قيمة (س) بالنسبة لـ (a) لتكون الزاوية $\widehat{\text{أيب}}$ قائمة

244) هب دائرتين و، و'، متقاطعتين في أ ، ب ـ النقطتان المقابلتان ل(أ) بالنسبة لمركزي الدائرتين هما ج،د

1") اثبت ان النقط الثلاث ج،ب،د هي على استقامة واحدة ـ قارن بين اتجاهي وطولي القطعتين ج د، وو'

2") من (ج) تنزل العمود (ج ن) على (د أ) ومن (د) تنزل العمود (د ك) على (ج أ) ـ عين موقع النقطتين ن،ك بالنسبة للدائرتين ـ اثبت ان (أب) يمر من نقطة تقاطع ج ن مع د ك (نقطة هـ)

3") اثبت العلاقات الآتية :

أن × أد = أج × أك

هـن × هـج = هـك × هـد

4") اثبت ان أب هو منصف الزاوية $\widehat{\text{نبك}}$

245) هب دائرة (و) شعاعا يساوي (ش) ـ ابتداءا من الشعاع وأ نرسم الزوايا الآتية:

$\widehat{\text{أوب}} = 60^\circ$ $\widehat{\text{بوج}} = 90^\circ$ $\widehat{\text{جود}} = 120^\circ$

1") برهن على ان أب هو موازي ل(ج د)

2") القطران أج ، ب د يتقاطعان في ي ـ اثبت ان

ي أ = ي ب ي ج = ي د

3") اثبت ان المستقيمات الجامعة بين منتصفات اضلاع أب ج د تعين مربعا

4") برهن على ان قطـرا من قطري هذا المربـع يمر من (ي) ومن (و) وان القطر الآخر يمر من منتصف ي و

5") احسب مساحة الرباعي أب ج د بالنسبة ل(ش)

246) هب دائرة (و،ش) واوتارها أب،ب ج،ج د المساوية على التـرتيب لضلـع المثلث المنتظم وضلع المسدس وضلع المربع

1") ماذا تلاحظ في الحبلين أج ، ب د

2″) أب ، دج يتقاطعان في (ن) ـ في المثلث أدن نبني الارتفاع ده والموسط دم ـ الشعاع (أو) يقطع (ده) في (ي) و (دم) في (ك) ـ الموسط دم يقطع بج في (ع)

جد في الشكل الناتج عن هذا البناء ثلاث مثلثات قائمة متشابهة وخمسة مثلثات متساوية الساقين وثلاث انصاف مثلثات منتظمة ومثلثان منتظمان كاملان

3″) ما هي قيمة الزاوية أن د ـ جد بالنسبة ل(ش) وللنسب المثلثية لهاته الزاوية طول القطعتين ب ن، ج ن

247) هب مربعا أب ج د ـ من الراس (أ) نرسم مستقيمين متعامدين ـ الاول يقطع (ب ج) في (س) و(ج د) في (ط) ـ نفرض ان المستقيم أس ص يبقى داخل الزاوية ب أد

1″) اثبت ان المثلثين أصع ، أس ط متساويا الساقين

2″) المستقيمان ص ع، س ط يتقاطعان في (ه) ونفرض ان (م) هو منتصف ص ع وان (ن) هو منتصف (س ط) ما هو نوع الرباعي أم ه ن

3″) المستقيم أس ص يدور حول (أ) ويبقى دائما داخل الزاوية ب أد ـ على اي مستقيم تتحرك النقط (م) و (ن) ؛ عين قطع التنقل عندما أس ص تتحرك داخل الزاوية ب أج ثم عندما أس ص تتحرك داخل الزاوية ج أد

248) هب الدائرة (و،ش) والوتر أب المساوي لضلع المثلث المنتظم ـ نفرض ان (ج) هو منتصف القوس الصغير أب

1″) نعتبر النقطة (م) المتحركة على القوس أج ب ـ نعدد في المستقيم أم بقطعة مك = مب ـ ما هي قيمة الزاوية أك ب استنتج من ذلك المحل الهندسي ل(ك)

2") برهن على ان منصف الزاوية أكب يمر من نقطة ثابتة ـ هذا المنصف يقطع القوس مب في (ي) ـ عين نوع النقطة (ي) بالنسبة للمثلث أكب

3") احسب مساحة المثلث أجك بالنسبة لـ(ش) ـ ثم احسب مساحة المثلث أكب عندما تقع (م) في (ج)

249) هب مثلثا أ ب ج متساوي الساقين (أب = أج) مرسوما في دائرة (و) ـ نعتبر نقطة (م) متحركة على القوس بج غير الحامل لـ(أ) من (ج) تنزل عمودا (جه) على (أم) ـ هذا العمود يقطع بم في (د)

1") جد المحل الهندسي لـ(ه)

2") جدْ المحل الهندسي لـ (د)

3") أم يقطع بج في (ك) ـ اثبت ان أج هو متوسط هندسي للقطعتين أك ، أم

250) هب مثلثا منتظما أبج ـ من الرأس (ج) تقيم عمودا (جس) على الضلع (بج) ـ ثم على الارتفاع أد نعتبر النقطة (و) بحيث ان أو = 2ود ـ المستقيم بو يقطع جس في (ك)

1") اثبت ان المثلث أكج متساوي الساقين

2") اثبت أن الرباعي أبجك يقبل الارتسام في دائرة

3") احسب اطوال القطع بك ، جك بالنسبة للضلع بج = a ـ ثم احسب مساحة الرباعي أبجك

4") برهن على وجود دائرة مرسومة في الرباعي أبجك ـ عين مركز هاته الدائرة وطول شعاعها .

جدول النسب المثلثية

للزوايا من °1 الى °89

الزاوية	حا	ظا	ظتا	حتا	
1	0،0175	0،0175	57،290	0،9999	89
2	0،0349	0،0349	28،636	0،9994	88
3	0،0523	0،0524	19،081	0،9986	87
4	0،0698	0،0699	14،301	0،9976	86
5	0،0872	0،0875	11،430	0،9962	85
6	0،1045	0،1050	9،5144	0،9945	84
7	0،1219	0،1228	8،1444	0،9926	83
8	0،1392	0،1405	7،1154	0،9903	82
9	0،1564	0،1584	6،3138	0،9877	81
10	0،1737	0،1763	5،6713	0،9848	80
11	0،1908	0،1944	5،1446	0،9816	79
12	0،2079	0،2126	4،7046	0،9782	78
13	0،2250	0،2309	4،3315	0،9744	77
14	0،2419	0،2493	4،0108	0،9703	76
15	0،3588	0،2680	3،7321	0،9659	75
16	0،2756	0،2868	3،4874	0،9613	74
17	0،2924	0،3057	4،2709	0،9563	73
18	0،3090	0،3249	3،0777	0،9511	72
19	0،3256	0،3443	2،9042	0،9455	71
20	0،3420	0،3640	2،7475	0،9397	70
	حتا	ظتا	ظا	حا	الزاوية

	حتــا	ظتــا	ظــا	حــا	الزاوية
69	0،9336	2،6051	0،3839	0،3584	21
68	0،9272	2،4751	0،4040	0،3746	22
67	0،9205	2،3559	0،4245	0،3907	23
66	0،9136	2،2460	0،4452	0،4067	24
65	0،9063	2،1445	0،4663	0،4226	25
64	0،8988	2،0503	0،4877	0،4384	26
63	0،8910	1،9626	0،5095	0،4540	27
62	0،8830	1،8807	0،5317	0،4695	28
61	0،8746	1،8041	0،5543	0،4848	29
60	0،8660	1،7321	0،5774	0،5000	30
59	0،8572	1،6643	0،6009	0،5150	31
58	0،8481	1،6003	0،6249	0،5299	32
57	0،8387	1،5399	0،6494	0،5446	33
56	0،8290	1،4826	0،6745	0،5592	34
55	0،8192	1،4282	0،7002	0،5736	35
54	0،8090	1،3764	0،7265	0،5878	36
53	0،7986	1،3270	0،7536	0،6018	37
52	0،7880	1،2799	0،7813	0،6157	38
51	0،7772	1،2349	0،8098	0،6293	39
50	0،7660	1،1918	0،8391	0،6428	40
49	0،7547	1،1504	0،8693	0،6561	41
48	0،7431	1،1106	0،9004	0،6691	42
47	0،7314	1،0724	0،9325	0،6820	43
46	0،7193	1،0355	0،9657	0،6947	44
45	0،7071	1،0000	1،0000	0،7071	45
الزاوية	حــا	ظــا	ظتــا	حتــا	

* الفهرس *

طبع وحفر : الشركة التونسية لفنون الـرسم

تم طبعه بتونس فى سبتمبر 1960

لنفس المؤلفين

1 ـ كتاب الحساب

للسنة الاولى من التعليم الثانوي

2 ـ كتاب الحساب والهندسة

للسنة الثانية من التعليم الثانوي

3 ـ كتاب الحساب والجبر والهندسة

للسنة الثالثة من التعليم الثانوي

من تاليف الاستاذ : محمد الميلي

التمارين الجبرية

مجموعة مختارة من التمارين معدة للمترشحين الى شهادة الاهلية وشهادة التحصيل والمناظرات الدولية

طبع الشركة التونسية لفنون الرسم ـ تونس