اختبار الرياضيات لدورة 2018

لشهادة ختم التعليم الأساسي

تمرين1(3ن)

(1 ب	1	(2 ج	1	(3 ج	1

1- $ABCD$ متوازي أضلاع اذن قطراه يتقاطعان في المنتصف ومنه

$\frac{y_B+y_D}{2}=\frac{y_A+y_c}{2}$ يعني $\frac{2+y_D}{2}=0$ يعني $y_D=-2$ 1ن

(يمكن الإجابة على السؤال بإنجاز تعيين للنقاط)

2- 13-9 = 4 1ن

3- $\left.\begin{aligned}&27^{2018}-2\times27^{2017}=27^{2017}\times(27-2)\\&=27^{2017}\times25=15\times27^{2016}\times45=M_{15}\end{aligned}\right\}$ 1ن

تمرين2(4ن)

نعتبر العددين الحقيقيين الموجبين a و b حيث $a^2=11+6\sqrt{2}$ و $b^2=11-6\sqrt{2}$.

1) أ) قارن العددين a^2 و b^2

بما أنّ $-6\sqrt{2}<6\sqrt{2}$ فإنّ $11-6\sqrt{2}<11+6\sqrt{2}$ 0.25

يعني $b^2<a^2$

ب) بيّن أنّ $(a-b)$ عدد موجب.

لدينا $b^2<a^2$ وبما أنّ a و b عددين موجبين فإنّ 0.5ن

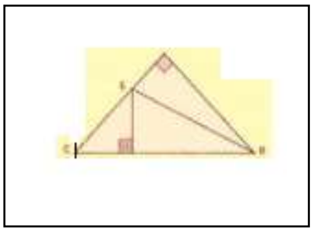
$b<a$ يعني $a-b>0$ ومنه $(a-b)$ عدد موجب

2) أحسب a^2b^2 ثمّ استنتج أنّ $ab=7$.

لدينا $a^2b^2=(11+6\sqrt{2})(11-6\sqrt{2})$ 0.25

$=11^2-(6\sqrt{2})^2=121-72=49$

بما أنّ $(ab)^2=49=7^2$ و $ab\geq0$ فإنّ $ab=7$ 0.5ن



3) أحسب $(a-b)^2$ ثمّ إستنتج أنّ $a-b=2\sqrt{2}$

لدينا : $(a-b)^2=a^2+2ab+b^2$ 0.5ن

$=11+6\sqrt{2}-(2\times7)+11-6\sqrt{2}=8$

وبما أنّ $(a-b)$ عدد موجب فإنّ $a-b=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. 0.25

ABC مثلّث متقايس الضلعين وقائم في A، حيث AB = a

E النقطة من [AC] حيث AE = b

4) أ) بيّن أنّ المثلث HEC متقايس الضلعين

بما أن المثلث ABC متقايس الضلعين وقائم في A فإنّ $A\hat{C}B=A\hat{B}C=45°$

في المثلث HEC لدينا : $E\hat{C}H=A\hat{C}B=45°$ و $C\hat{H}E=90°$ 0.5ن

اذن $C\hat{E}H=180-(90+45)=45°$ وبالتالي المثلث HEC متقايس الضلعين(له زاويتان متقايستان) قمته الرئيسية H.

ب) بيّن أنّ $EH = 2$.

لدينا $EC = AC - AE = a - b = 2\sqrt{2}$

المثلث HEC قائم ومتقايس الضلعين (وتره يمثل قطر للمربع الذي ضلعه $[EH]$)

0.5ن

اذن $EC = EH\sqrt{2}$ يعني $EH = \frac{EC}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$

5) لتكن S مساحة المثلث BEC.

أ) بيّن أنّ $S = a\sqrt{2}$.

المثلث ABC قائم ومتقايس الضلعين في A. اذن $BC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

مساحة المثلث BEC هي

0.5ن

$$S = \frac{BC \times EH}{2} = \frac{a\sqrt{2} \times \cancel{2}}{\cancel{2}} = a\sqrt{2}$$

ب) بيّن أيضا أنّ $S = 2 + 3\sqrt{2}$، ثمّ إستنتج أنّ $a = 3 + \sqrt{2}$.

لتكن S_1 مساحة المثلث ABC و S_2 مساحة المثلث ABE

اذن

0.25

$$S = S_1 - S_2 = \frac{AB^2}{2} - \frac{AB \times AE}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a \times b}{2} = \frac{11 + 6\sqrt{2} - 7}{2} = \frac{4 + 6\sqrt{2}}{2} = 2 + 3\sqrt{2}$$

وبالتالي $a\sqrt{2} = 2 + 3\sqrt{2}$ يعني $a = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 3)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 3$

0.25

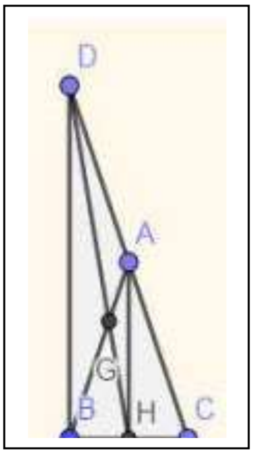
تمرين3(4ن)

ABC مثلث متقايس الضلعين وقمته الرئيسية A حيث $BC = 2$ و $AB \geq 3$.
لتكن النقطة D مناظرة النقطة C بالنسبة إلى A

و H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

المستقيمان (AB) و (DH) يتقاطعان في النقطة G.

1) أ) بيّن أنّ المثلث BCD قائم في B.



في المثلث BCD لدينا $\left\{\begin{array}{l}\bullet\ A \text{ منتصف } [DC] \text{ لأن } D \text{ و } C \text{ متناظرتان بالنسبة إلى } A \\ \bullet\ AB = AC = AD\end{array}\right.$

اذن المثلث BCD قائم في B (وتره $[DC]$) 0.5ن

ب) بيّن أن G مركز ثقل المثلث BCD.

✡ المثلث ABC متقايس الضلعين قمته الرئيسية A و $[AH]$ ارتفاعه الموافق للضلع $[BC]$

اذن فهو كذلك موسطه الصادر من A ومنه H منتصف $[BC]$.

✡ في المثلث BCD لدينا: $[BA]$ و $[DH]$ هما الموسطين الصادرين على التوالي من B و D

اذن نقطة تقاطعهما G هي مركز ثقل هذا المثلث. 0.5ن

نفترض أن $AB = x + 3$ حيث x عدد حقيقي موجب.

2) أ) بيّن أن $BD^2 = 4(x^2 + 6x + 8)$

لدينا: $AC = AB = x + 3$ و $DC = 2AC = 2(x + 3)$

المثلث BCD قائم اذن حسب نظرية بيتاغورفإنّ: $BD^2 + BC^2 = DC^2$

$BD^2 = DC^2 - BC^2 \ = [2(x+3)]^2 - 2^2 = 4(x+3)^2 - 4 = 4[(x+3)^2 - 1]$

$= 4(x^2 + 6x + 9 - 1) = 4(x^2 + 6x + 8)$

0.75

ب) بيّن أن $BD = 2\sqrt{35}$ يعني $x^2 + 6x - 27 = 0$

بما أن BD موجب فإن: $BD = 2\sqrt{35}$ يعني $BD^2 = (2\sqrt{35})^2 = 140$ يعني $4(x^2 + 6x + 8) = 140$

يعني $x^2 + 6x + 8 = \frac{140}{4} = 35$ يعني $x^2 + 6x + 8 - 35 = 0$ يعني $x^2 + 6x - 27 = 0$ 0.5ن

3) أ) بيّن أن $x^2 + 6x - 27 = (x + 3)^2 - 36$

$(x+3)^2 - 36 = x^2 + 6x + 9 - 36 = x^2 + 6x - 27$ 0.5ن

ب) إستنتج أن $x^2 + 6x - 27 = (x - 3)(x + 9)$

لدينا :

$x^2 + 6x - 27 = (x+3)^2 - 36 = (x+3)^2 - 6^2 \ = (x+3-6)(x+3+6) = (x-3)(x+9)$ 0.5ن

ج) أوجد x حيث $BD = 2\sqrt{35}$، ثم إستنتج البعد BG.

$BD = 2\sqrt{35}$ يعني $x^2 + 6x - 27 = 0$ يعني $(x-3)(x+9) = 0$ يعني $x + 9 = 0$ أو $x - 3 = 0$ يعني $x = -9$ أو $x = 3$

وبما أن x عدد حقيقي موجب فإن $x = 3$ 0.5ن

نعلم أن G مركز ثقل المثلث BCD و $[BA]$ موسطه الصادر من B اذن $BG = \frac{2}{3}BA = \frac{2}{3}\times(3+3) = 4$

0.25

تمرين4(5ن)

A و B نقطتان من المستوي، حيث AB = 6 و I منتصف قطعة المستقيم [AB] لتكن $\mathscr{C}$ الدائرة التي قطرها [AB]

و C نقطة من $\mathscr{C}$ ، حيث AC = 5.

1) أحسب BC.

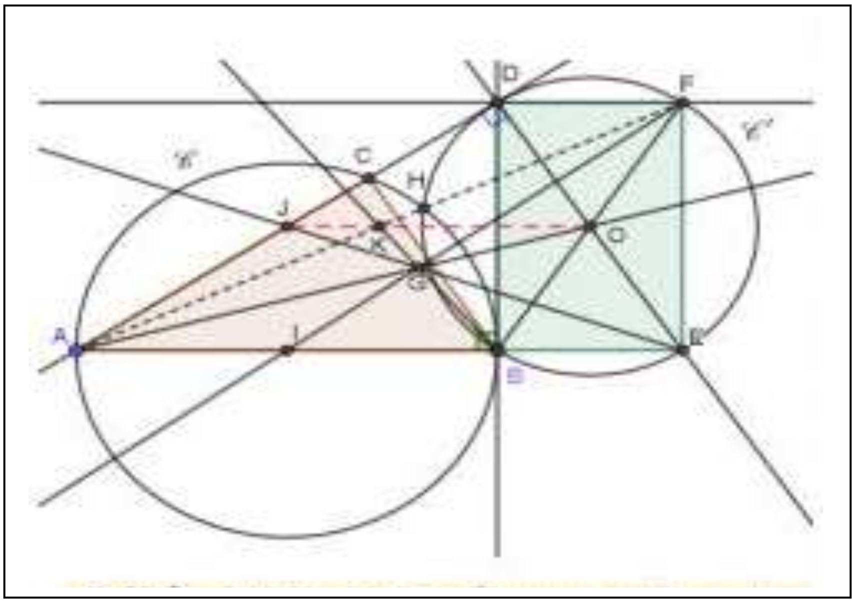
لدينا : ζ دائرة و $[AB]$ قطر لها و C نقطة منها حيث $C \neq A$ و $C \neq B$ إذن المثلّث ABC قائم في C

حسب نظريّة بيتاغور فإنّ : $BC^2 + AC^2 = AB^2$ إذن $BC^2 = AB^2 - AC^2$

$$BC^2 = 6^2 - 5^2 = 36 - 25$$

0.5ن

$$BC = \sqrt{11}$$



2) المماس للدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة B يقطع (AC) في النقطة D.

أ) بيّن أنّ $CD = \frac{11}{5}$.

المثلّث ABD قائم في B و $[BC]$ ارتفاعه الصادر من B . اذن $BC^2 = AC \times CD$

ومنه

0.75

$$\boxed{CD = \frac{BC^2}{AC} = \frac{11}{5}}$$

ب) أحسب BD.

المثلث BCD قائم في C . حسب نظريّة بيتاغور فإنّ $BD^2 = BC^2 + CD^2$

يعني $BD^2 = \left(\frac{11}{5}\right)^2 + \left(\sqrt{11}\right)^2 = \frac{121}{25} + \frac{11 \times 25}{1 \times 25} = \frac{121 + 275}{25} = \frac{396}{25}$

ومنه

0.5ن

$$\boxed{BD = \sqrt{\frac{396}{25}} = \frac{6}{5}\sqrt{11}}$$

3) المستقيم العمودي على (AC) في النقطة D يقطع (AB) في نقطة E. لتكن $\mathscr{C}'$ الدائرة التي قطرها [DE] و مركزها O.
المستقيم المار من D والموازي للمستقيم (AB) يقطع $\mathscr{C}'$ في نقطة F مخالفة للنقطة D.

أ) بيّن أنّ الرباعي BDFE مستطيل

ζ' دائرة و $[DE]$ قطر لها و F نقطة منها حيث $F \neq D$ و $F \neq E$ إذن $D\hat{F}E = 90°$

و لنا $D\hat{B}E = 90°$ لأنّ $D\hat{B}A = 90°$ و $(E \in (AB))$

* لنا $(DF)//(AB)$ و $(DB)\perp(AB)$ إذن $(DB)\perp(DF)$ ومنه $B\hat{D}F = 90°$

بالتّالي الرّباعي $BDFE$ له 3 زوايا قائمة فهو مستطيل. 0.75

ب) الدائرتان $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ تتقاطعان في نقطة H مخالفة للنقطة B. أثبت أنّ النّقاط A و H و F على استقامة واحدة

المثلث AHB يقبل الأرتسام في الدائرة ζ التي قطرها $[AB]$ يمثل أحد أضلاعه اذن فهو قائم في H ومنه $(AH)\perp(BH)$

المثلث FHB يقبل الأرتسام في الدائرة ζ' التي قطرها $[BF]$ أحد أضلاعه اذن فهو قائم في H

ومنه $(FH)\perp(BH)$ اذن $(FH)//(AH)$ وبالتالي النّقاط A و H و F على استقامة واحدة. 0.5ن

4) المستقيمان (AO) و (FI) يتقاطعان في نقطة G والمستقيمان (BG) و (AF) يتقاطعان في نقطة K.

أ) بيّن أنّ K منتصف [AF]

في المثلث ABF لدينا : $\left.\begin{array}{l}[AO] \text{ هو الموسط الصّادر من } A \\ [FI] \text{ هو الموسط الصّادر من } F\end{array}\right\}$ و بمأن $(FI)\cap(AO)=\{G\}$

فإنّ G مركز ثقل المثلّث ABF ومنه $\left(AG=\frac{2}{3}AO\right)$ 0.75

(BG) هو المستقيم الحامل للموسّط الصّادر من B . وحيث أنّ $(BG)\cap(AF)=\{K\}$ فإنّ K منتصف $[AF]$

ب) أثبت أنّ G مركز ثقل المثلث AED. 0.25

$[AO]$ هو الموسّط الصّادر من A للمثلّث ADE ، ولنا $G\in[AO]$ بحيث $AG=\frac{2}{3}AO$ وبالتالي G مركز ثقل المثلّث AED

ج) المستقيمان (EG) و (AD) يتقاطعان في النّقطة J. . بيّن أنّ النّقاط J و K و O على استقامة واحدة 0.75

لنا G مركز ثقل المثلّث ADE إذن (EG) هو المستقيم الحامل للموسّط الصّادر من E
وحيث انّ $(EG)\cap(AD)=\{J\}$ فإنّ J منتصف $[AD]$.

في المثلّث ABF لنا : O منتصف $[BF]$ و K منتصف $[AF]$ إذن $\boxed{(OK)//(AB)}$

في المثلّث ADE لنا : O منتصف $[DE]$ و J منتصف $[AD]$ إذن $\boxed{(OJ)//(AE)}$

وبما أنّ $(AB)=(AE)$ فإنّ $\boxed{(OK)//(OJ)}$ ومنه النّقاط J و K و O على استقامة واحدة .

لیكن ABCDEFGH متوازي مستطيلات حيث AB = 6 و AE = 4 و AD = 3
1) أ) بين أن ADG مثلث قائم في D.

لدينا $\left.\begin{matrix}(AD)\perp(DC)\\(AD)\perp(DH)\end{matrix}\right\}$ لأنّ ($ABCD$ مستطيل و $ADHE$ مستطيل)

وبماأنّ المستقيمين (DC) و (DH) محتويين في المستوي (DCG) ومتقاطعين في D

فإنّ (AD) يعامد المستوي (DCG) في D. **0.5**

و لنا $(DG)\subset(DCG)$ اذن $(AD)\perp(DG)$ في D و منه المثلّث ADG قائم في D.

ب) أحسب DG و AG.

المثلّث DCG قائم في C . اذن حسب نظريّة بيتاغور فإنّ : $DG^2 = DC^2 + CG^2$

$$DG^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$$

إذن $DG = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ **0.5**

$[AG]$ هو قطرلمتوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ إذن

$$AG = \sqrt{DC^2 + AD^2 + AE^2} = \sqrt{6^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{61}$$ **0.5**

2) لتكن M النقطة من [AE] حيث AM = 3 و Δ المستقيم العمودي على المستوي (AED) في النقطة M.

أ) بين أن Δ محتو في المستوي (AEF).

3دق

لدينا : $\left.\begin{matrix}(EF)\perp(EA)\\(EF)\perp(EH)\\(EA)\subset(AED)\\(EH)\subset(AED)\\(EA)\cap(EH)=\{E\}\end{matrix}\right\}$ اذن $(EF)\perp(AED)$ ولنا $\Delta\perp(AED)$ في M **0.5**

ومنه $\Delta // (EF)$ وبالتالي هما محتويان في مستوي واحد يمر من E و F و M إذن $\Delta\subset(MEF)=(AEF)$

ب) المستقيم Δ يقطع المستقيم (AF) في النقطة N. بين أنّ $\frac{AM}{AE}=\frac{MN}{EF}$

في المثلّث AEF لنا : $M\in(AE)$ و $N\in(AF)$ حيث $(MN)//(EF)$.

حسب مبرهنة طالس في المثلّث فإنّ : $\frac{AM}{AE}=\frac{AN}{AF}=\frac{MN}{EF}$ بالتالي $\frac{AM}{AE}=\frac{MN}{EF}$ **0.75**

ج) أحسب MN ثمّ DN.

لنا $\frac{MN}{EF}=\frac{AM}{AE}$ إذن $\frac{MN}{6}=\frac{3}{4}$ يعني $\boxed{MN=\frac{3\times6}{4}=\frac{9}{2}=4,5}$ **0.25**

لحساب DN نحسب أولا DM

المثلّث ADM قائم ومتقايس الضلعين في A اذن $\boxed{DM=\sqrt{2}\times AD=3\sqrt{2}}$

لدينا: $\left.\begin{matrix}(MN)\perp(AED)\\(DM)\subset(AED)\end{matrix}\right\}$ ومنه $(MN)\perp(DM)$ في M **0.25**

وبالتالي المثلث DMN قائم في M اذن حسب نظرية بيتاغور:

$$DN^2 = DM^2 + MN^2$$
$$= (3\sqrt{2})^2 + (\frac{9}{2})^2 = 18 + \frac{81}{4} = \frac{153}{4}$$

ومنه $DN = \sqrt{\frac{153}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{17}$ **0.25**

3) أحسب حجم الهرم NMAD.

لنا$(AED) \perp \Delta$ في M و N نقطة من Δ. إذن $[NM]$ هو ارتفاع الهرم $NMAD$

وبالتالي حجمه هو
$$V = \frac{1}{3} \times \frac{AD \times AM}{2} \times NM$$

0.5

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 3}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{27}{4} cm^3$$